

אנחנו, למשל, נשתמש בהצגות, $\frac{a}{b}$

$$\left| \frac{x^{(1)}}{y^{(1)}} \right|_2 < 1$$

אם $|x|_2 < |y|_2^{\frac{1}{a}}$, נקרא a גורם-גודל, $\frac{1}{a}$

$$|x|_2 \leq |y|_2^b$$

כאשר $\frac{1}{a} < b$ נקרא a גורם-גודל

$$|x|_2 \geq |y|_2^b$$

אם $|x|_2 = |y|_2^b$

□ $|x|_2 = |y|_2^b = |y|_1^{ab} = |x|_1^a$

6/3/19

הכרזה 2

$H: K \rightarrow \mathbb{R}$ סקלר - K שדה

① $x=0 \Leftrightarrow |x|=0$ וכן, $x \in K$ וגם $|x| \geq 0$

② $|xy| = |x| |y|$

③ $|x+y| \leq |x| + |y|$

העקרון של המשולש הוא $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

③ \Leftrightarrow ③

העקרון של ③ \Leftrightarrow ③

העקרון של המשולש הוא המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ וכן $|x| \leq |x+y| + |y|$ \Leftrightarrow ③

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x| \sim |y|$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

$$|x|_1^a = |x|_2$$

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

$$O_u = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

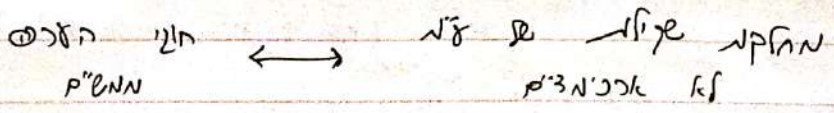
~~העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-~~

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

$$O = \{x \mid |x| \leq 1\}$$

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-



העקרון של המשולש $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ הוא $|x|_1^a = |x|_2$ \Leftrightarrow קיים $a > 0$ כזה ש-

נניח שהנניט a_{N-1}, \dots, a_0

$$a_N^2 \equiv 2 \pmod{7^N}$$

אם a_N הוא מספר שלם, אז $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7^N}$

$$a_{N+1}^2 \equiv 2 \pmod{7^{N+1}}$$

ע"כ

$$a_N^2 = 2 + b \cdot 7^N, \quad a_{N+1} = a_N + 7^N \cdot d_N$$

אז

$$a_{N+1}^2 = a_N^2 + 2 \cdot 7^N d_N + 7^{2N} d_N^2$$

אז $a_{N+1}^2 \equiv a_N^2 + 2 \cdot 7^N d_N \pmod{7^{N+1}}$

$$2 \equiv a_{N+1}^2 \equiv a_N^2 + 2 \cdot 7^N d_N a_N \pmod{7^{N+1}}$$

$$\equiv 2 + 7^N (2a_N d_N + b) \pmod{7^{N+1}}$$

כלומר $a_N^2 \equiv 2 \pmod{7^N}$

$$2d_N \cdot 3 \equiv 2d_N a_N \equiv -b \pmod{7} \Leftrightarrow a_N^2 \equiv 2 \pmod{7^{N+1}}$$

אם $a_N \equiv b \pmod{7}$, אז $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7}$

אם $a_N \equiv -b \pmod{7}$, אז $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7}$

$$|a_N - a_{N+1}| = \left| \sum_{k=N}^{N+1} 7^k d_k \right| \leq 7^{-N} \rightarrow 0$$

אם $d_k = 1$ או $d_k = 0$, אז $|d_k| = 1$

אם $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7}$, אז $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7^N}$

אם $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7^N}$, אז $a_N \equiv \pm \sqrt{2} \pmod{7^{N+1}}$

הערה:

① שדה L עם נורמה $\|\cdot\|$ שלם (complete) ו- \mathbb{R} או \mathbb{C}

קוסי-מטרי

② קיימת שדה K עם נורמה $\|\cdot\|$ והשלמה $(K, \|\cdot\|)$ היא L

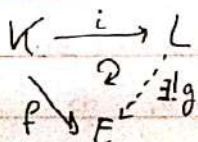
שדה L עם נורמה $\|\cdot\|$, אם $\|\cdot\|$ - שכיח

$$K \rightarrow L$$

אם $\|\cdot\|$ - נורמה של L , אז $\|x\| = \|x\|_K$, ו- $\|x\|_K = \|x\|_L$

הערה: נניח $(L, \|\cdot\|)$ שדה עם נורמה שלם $\|\cdot\|$

$f: K \rightarrow E$, f - הפיכה * (הערה)



$g: L \rightarrow E$ - הפיכה יחידה

אם $f \circ g \circ i$

* הערה: $\|\cdot\|$ - נורמה של E , אז $\|f \circ g \circ i\| = \|\cdot\|$

הוכחה: טריוויה.

מסקנה: הטענה מוכיחה את כבי אינפורמציה יחיד.

משפט: לכל שדה K עם \mathbb{C} ו- \mathbb{R} יש הטענה.

הוכחה: נסמן $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ל-קבוצה \mathbb{C} ו- \mathbb{R} הקושי $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ ונסמן $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ל-הקבוצה שמכילה את \mathbb{R} ו- \mathbb{C} ו- \mathbb{R} .

$$K \ni x \mapsto \{x\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$$

(הסדרה הקבוצתית)

נציג חיבור וכפל של איברים $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ קואורדינטה-קואורדינטה -

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

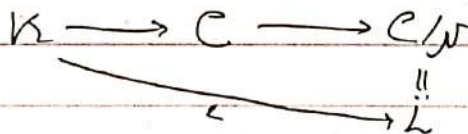
$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$$

אם \mathbb{C} הוא K -אלגברה. כיוון שהאיברים $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ הם \mathbb{R} ו- \mathbb{C} : אם $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, ניקח $\varepsilon = 1$ ויש N כזה $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq 1$

$$|a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| \leq \varepsilon$$

$$|a_n| \leq |a_N| + 1 \leq \sum_{k=1}^N |a_k| + 1$$

הוא מוגבל, N איז קבוע, $\{a_n\}$ הוא מוגבל.



זו הוכחה ש- L היא שדה

② L היא בסיס זוגי שמכיל את \mathbb{R} ו- K .

כדי אבוא ש- L שדה, זו הוכחה ש- \mathbb{N} טריוויה. זו

הוכחה ש- $\mathbb{N} - \mathbb{C}$ הוא הפיק כיוון ש- $\{x_n\}$ וקושי \mathbb{N} φ \mathbb{R} $x_n \neq 0$, $n > N$.

(הערה: אם $x_n \neq 0$ קושי $\{x_n\}$ קושי $\mathbb{R} - \mathbb{C}$ ו- \mathbb{R} φ \mathbb{R} $x_n > 0$ $\forall n > 1$.)

$$y_n = \begin{cases} 1, & x_n = 0 \\ 1/x_n, & x_n \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = 1$$

אם $\{x_n y_n - 1\} \in \mathbb{N}$ כנראה.

נציג \mathbb{R} \mathbb{C} -

מקרה:

$$\| \sum a_n \| := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$$

יש, $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ (כלים של פאונדטור). הוכחה נכונה של

מקרה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$$

נניח - כי $\{a_n\}$ קוסי $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. אנו רוצים להוכיח (נניח) שהערך הממוצע של $\{a_n\}$ הוא $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, ורק זהו הממוצע.

נניח $\{a_n\}$ קוסי $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - אז $\{a_n\}$ קוסי

$$b_n^{(k)} = a_n - \text{קוסי}$$

$$\{b_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ קוסי}$$

אז

$$\| \{b_n^{(k)}\} - \{a_n\} \| = \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n^{(k)} - a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_n| = 0$$

הוכחה שהערך הממוצע של $\{a_n\}$ הוא $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. $\delta > 0$

נניח $\{a_n\} \in \mathbb{C}$ (קוסי). הוכחה נכונה של

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\| \cdot \|$ שיהיה ברור.

$$K \rightarrow \mathbb{C} \text{ קוסי } u^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$$

כל $k > 0$, יש $N(k)$ כך ש

$$|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| \leq \frac{1}{k}$$

נניח

$$u = \{x_{N(n)}^{(n)}\}$$

נניח u קוסי

$$u^{(m)} \xrightarrow{L} u$$

① - יהי $\epsilon > 0$. נניח $\{u^{(k)}\}$ קוסי $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $L \rightarrow u$

כל $k, m \geq N$ כך ש

$$\frac{\epsilon}{3} \geq \|u^{(k)} - u^{(m)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n^{(k)} - u_n^{(m)}|$$

נניח $k, m \geq N$. כל $r, c \geq M$ כך ש

$$|x_{N(r)}^{(r)} - x_{N(c)}^{(c)}| \leq |x_{N(r)}^{(r)} - x_k^{(r)}| + |x_k^{(r)} - x_{N(c)}^{(c)}| + |x_{N(c)}^{(c)} - x_k^{(c)}| \leq$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + |x_k^{(c)} - x_k^{(r)}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \epsilon$$

אז קוסי

② (נניח)

$$\|u^{(n)} - u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k^{(n)} - x_{N(k)}^{(k)}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[|x_k^{(n)} - x_{N(k)}^{(n)}| + |x_{N(k)}^{(n)} - x_{N(k)}^{(k)}| \right] \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}$$

□ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$
דוגמה: $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$
 $\mathbb{Q}_p = \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$