13/3/19 $\boxed{\text{הרצאה 3}}$

חוגי הערכה בדידה שלמים (Complete DVR)

יהי (K,v) שדה מוערך בבדידות (כלומר, v הערכה בדידה): הה״כ $v: K \twoheadrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ (כלומר ההערכה מנורמלת). יהי $\mathcal{O}_v$ חוג ההערכה, $\mathfrak{p}_v = \pi\mathcal{O}_v$ האידאל המקסימלי, כלומר π הוא <u>מאחיד</u> (uniformizer) - $v(\pi)>0$ מינימלי.

ניקח $(K_v,\hat{v})$ השלמה של K, ונניח ש-$\hat{v}$ מרחיב את v. ברור שחבורת ההערכה של $\hat{v}$ היא הסגור של חבורת ההערכה ולכן גם $\hat{v}$ בדידה (נשים לב ש-v פונקציה <u>רציפה</u> - היא בערך הערך המוחלט).
מעכשיו נסמן את $\hat{v}$ ב-v (רק להקלה). יש חוג הערכה בדידה,

$$\hat{\mathcal{O}}_v = \{x\in K_v \mid v(x)\ge 0\}$$
$$\hat{\mathfrak{p}}_v = \{x\in K_v \mid v(x)>0\} = \pi\hat{\mathcal{O}}_v$$

(π עדיין מאחיד כי v מרחיבה וחבורת ההערכה לא משתנה)

כמו שאמרנו בע״פ, אם $x_n \to x$ אז $v(x_n)\to v(x)$. ולכן אם $\{x_n\}$ מתכנסת (לא לאפס) אז $\{v(x_n)\}$ קבועה הנ״מ.

<u>מסקנה</u>: $x\in\hat{\mathcal{O}}_v$ הוא הפיך $\Leftrightarrow$ x גבול של הפכ״ים.

<u>הוכחה</u>: לכן, נובע מיידי מכך שהגבול x הפיך $\Leftrightarrow v(x)=0$. ∎

<u>טענה</u>: ההעתקה $\mathcal{O}_v\to\hat{\mathcal{O}}_v$ משרה סדרה של העתקות תואמות,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "G"] & \hat{\mathcal{O}}_v/\hat{\mathfrak{p}}_v^n \arrow[d] \\
\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^{n-1} \arrow[r, "\sim"] & \hat{\mathcal{O}}_v/\hat{\mathfrak{p}}_v^{n-1}
\end{tikzcd}$$

ובפרט,

$$\hat{\mathcal{O}}_v = \varprojlim_n \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n$$

<u>הוכחה</u>: ברור ש-

$$\mathfrak{p}_v^n = \{x\in K \mid v(x)\ge n\} = \{x\in \hat{K} \mid v(x)\ge n\} = \hat{\mathfrak{p}}_v^n \cap \mathcal{O}_v$$

ולכן, ההעתקות האופקיות מוגדרות וחח״ע.
אם ניקח $x\in\hat{\mathcal{O}}_v$, יש $y\in\mathcal{O}_v$ כך ש-$v(x-y)\ge n$. ולכן,

$$x\equiv y \pmod{\hat{\mathfrak{p}}_v^n}$$

ולכן ההעתקות האופקיות על. התואמות גם ברור כי הכל מוגדר טבעי,

ולכן הוכחנו את החלק הראשון.

תזכורת: אם יש מערכת הפוכה של אובייקטים,

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} X_i \xrightarrow{\varphi_i} X_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \cdots$$

אז ההגדרה של הגבול ההפוך היא האובייקט היחיד שמקיים שלכל R,

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[dll] \arrow[dl, "\psi_{i+1}"'] \arrow[d, "\psi_i"] \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r] & X_i \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

יש $\psi: R \to \varprojlim X_n$ יחיד כך שכל מה שצריך מתחלף.

בנאי סטנדרטי של $\varprojlim X_i$ - $X \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ כך ש- $X=\{(x_i)\in\prod_i X_i \mid \forall j.\ \varphi_j(x_j)=x_{j-1}\}$.

במקרה שלנו,

$$\hat{O}_v \xrightarrow{\sim} \varprojlim \hat{O}_v/\hat{P}_v^n \cong \varprojlim O_v/P_v^n$$

היא על, וחח"ע כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{P}_v^n = 0$. לכן כתבנו איזומורפיזם בחץ הראשון, והאיזומורפיזם השני בא ממה שהוכחנו בחלק הראשון - כי יש איזומורפיזם וההעתקה בין הקואורדינטות שלכתבנו) $\square$

המבנה של DVR שלם I: (מאפיין שווה)

__בהינתן__, O_v חוג הערכה שלם

v ההערכה המנורמלת

π מחולל

K שדה מנה

$\bar{K}=O_v/\pi O_v$ שדה שארית

[__דוגמה:__ $O=\mathbb{C}[[x]]$ - טורי טיילור פורמליים. $\pi=x$, $\bar{K}=\mathbb{C}$.]

נבחר $S\subseteq K$, $0\in S$ מערכת מייצגים ל-$\bar{K}$, כלומר $S\hookrightarrow O\to\bar{K}$.

חח"ע ועל כפונקציה

טענה:

לכל איבר $x\in O$, יש הצגה __יחידה__ מהצורה $x=\sum_{n=0}^{\infty} s_n\pi^n$ עם $s_n\in S$, והטור מתכנס. באופן דומה לכל $x\in K$ יש הצגה יחידה $x=\sum_{n\gg-\infty} s_n\pi^n$.

__הוכחה:__ הטענה השנייה נובעת מהראשונה ע"י הכפלה ב- $\pi^{-v(x)}$, עבור $v(x)<0$.

נניח אם כך ש- $x\in O$. נגדיר באינדוקציה את s_n: $s_0\equiv x \pmod{\pi}$,

$$s_1=\frac{x-s_0}{\pi} \bmod \pi$$

$$s_2=\frac{x-s_0-s_1\pi}{\pi^2} \bmod \pi$$

$$\vdots$$

ולכן, $x \equiv s_0 + \pi s_1 + \dots + \pi^n s_n \pmod{\pi^{n+1}}$. לכן, $x = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \pi^n$. □

דוגמה: ניקח $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$, וגם $S = \{0, \dots, p-1\}$. זה נותן -
$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ לכל $x \in \mathbb{Z}_p$

חיבור "עם נשא" - $p = 1 + p-1$ בגלל קיזוז -

$$(p-1, 0, \dots) + (1, 0, \dots) = (0, 1, \dots)$$

מערכת נציגים "יותר טובה" היא -

$$S = \{0\} \cup \mu_{p-1}$$ (למה $\mu_{p-1} \subseteq \mathbb{Z}_p$? בתרגיל. נובע מהנזל)

כאשר μ_n = שורשי יחידה מסדר n - מערכת כפלית.

הערה: אם $0 \in S$ מערכת נציגים אז כל טור $\sum s_i \pi^i$ מתכנס.

מעניין עבור שים $S \subseteq \mathcal{O}$ תת חוג, ולא רק בהכרח $S \cong \bar{k}$,
אז:

$$\mathcal{O} \cong \bar{k}[[x]]$$
$$\sum s_n \pi^n \longrightarrow \sum \bar{s}_n x^n$$

ובמקרה זה, $\operatorname{char} \mathcal{O} = \operatorname{char} K$.

ההפך גם נכון -

משפט: יהי $\mathcal{O}$ חוג הערכה בדידה כך ש-$\operatorname{char} \bar{k} = \operatorname{char} \mathcal{O}$. נניח ש-$\bar{k}$ משוכלל (כלומר אין ל-$\bar{k}$ הרחבות לא-פרידות) אזי - $\mathcal{O} \cong \bar{k}[[x]]$.

במקרה, חוגים שלמים בהם בגיאומטריה אלגברית הם חוגים של טורי טיילור (מה?!) כי החוגים שעוסקים הם חוגי הערכה בדידה...

הערה: ניתן להוריד את הנחת השכלול, אבל לא נעשה זאת.

"הוכחה": די למצוא $S \subseteq \mathcal{O}$ תת שדה.

במקרה 0 - יהי $\mathcal{O}$ חוג שלם שהוא האוסדורף ושלם ביחס לטופולוגיה המושרית מסדרת אידיאלים, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ כך ש-$I_{m+n} \supseteq I_n I_m$.

[הבסיס לטופולוגיה של אפס - $I_1, \dots$. וזה עושה הכל.]

נניח $\bar{k} = \mathcal{O}/I_1$ שדה ממאפיין אפס. אזי יש $S \subseteq \mathcal{O}$ נציגים שדה.

(אפשר לעשות משהו עם טיעון קושי כדי לפתור את זה בלי בדיוק אם יש מטריקה)

יש:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \bar{k}$$ חח"ע (בגלל שהמציין אפס)

ובמיוחד $\mathbb{Z}$ ב-$\mathcal{O}$ הפיכים $\Leftarrow$ $\mathcal{O}$ מכיל שדה.

ניקח את $S \subseteq \mathcal{O}$ להיות שדה מקסימלי. נסמן $\bar{S} \subseteq \bar{k}$. מיון - להגיע

שלילה. אם יש $\bar{x} \in \bar{k}$ שלא ב-$\bar{S}$ אז הרחבה נוצרת (מ...

ב-$\bar{S}$ ... $S(x) \subseteq \mathcal{O}$ - סגורה טופולוגית. אז ... אלגברי מעל $\bar{S}$
אז הוא שורש של $\bar{f}(x)$ הפולינום הזה פרים. נניח ש- $\bar{f}$ ו-f
משתמשים בהלמה. $\bar{f}$ פריק, מהלמה של הנזל יש $x\in\mathcal{O}$ שמשווה
ל-$\bar{x}$ ואז $S[x] = S(x) = \underbrace{S}_{\text{מהמקסימליות}}$, ולכן $\bar{x}\in\bar{S}$. □

<u>הנזל:</u> (הלמה של הנזל)

יהי $\mathcal{O}$ כמו בהגדרה הקודמת, בלי הדרישה ש-$\operatorname{char}\bar{k}=0$.
ניקח $f\in\mathcal{O}[x]$, כך של-$\bar{f}\in\bar{k}[x]$, הפולינום מודולו I_1,
יש שורש פשוט $\alpha\in\bar{k}$. אז קיים $a\in\mathcal{O}$ יחיד כך ש-$f(a)=0$,
$a\equiv\alpha \pmod{I_1}$.

<u>הוכחה:</u> בונים את הסדרה a_n באינדוקציה. קשה האינדוקטיבי:

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) + hf'(a_n) \pmod{I_{n+1}}$$

כאשר - $a_{n+1} = a_n + h,\ h\in I_n$

מה שצריך זה לבחור h כך ש-

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) + hf'(a_n) \equiv 0 \pmod{I_{n+1}}$$

כאן נכנס $f'(\alpha)$ הפיך מודולו I_1

ולבחור - $h = -f(a_n)/f'(a_n)$. ($f'(a_n)\not\equiv 0 \pmod{I_1}$ כי $f'(a_n)\equiv f'(\alpha) \pmod{I_1}$) □

<u>מקרה שני</u> - $\operatorname{char}\mathcal{O} = \operatorname{char}\bar{k} = p > 0$

חוג Λ בציפיון p הוא <u>משוכלל</u> אם האנדומורפיזם פרובניוס $x\mapsto x^p$
הוא <u>על</u>. בעצם, לכל $x\in\Lambda$ יש שורש p - כלומר $x^{1/p}\in\Lambda$.

<u>הגדרה המרכזית:</u> יהי $\mathcal{O}$ חוג שלם, האוסדורף, שלם ביחס לסדרה
$I_1\supseteq I_2\supseteq\dots$ עם $I_{n+m}\supseteq I_nI_m$. נניח ש-$\bar{k}=\mathcal{O}/I_1$ - שדה משוכלל
ממציין $p>0$. ~~[illegible]~~

1) יש בדיוק מערכת נציגים אחת $f:\bar{k}\to\mathcal{O}$ ($S=f(\bar{k})$) שמשמרת
את פרובניוס: $f(\alpha^p)=f(\alpha)^p$.
2) $a\in\mathcal{O}$ שייך ל-S $\Leftrightarrow$ יש לו שורש p^n לכל n.
3) מערכת הנציגים היא כפלית - $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$, לכל $\alpha,\beta\in\bar{k}$.
4) אם $\operatorname{char}\mathcal{O}=p$ אז S הוא שדה.

<u>הוכחה:</u> ניקח $\alpha\in\bar{k}$. ניקח -

$$L_n = \{a\in\mathcal{O} \mid a\equiv\alpha^{p^{-n}} \bmod I_1\}$$
$$U_n = \{a^{p^n} \mid a\in L_n\}$$

ניקח $U_n\subseteq L_0=\{\alpha \text{ הרמות}\}$, $U_{n+1}\subseteq U_n$. נראה ש-U_n קושי (Cauchy Filter Base)

ולא ניתן להגדיר מלמעלה דיוק (...) □

בחשבון שלם, כי לא מטריד, וזו נעשה לא בכלליות הזאת.

פונקציה טרנסצנדנטית:

נתבונן בפונקציה-

$$\exp(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

$$-\log(1-x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i}$$

כש-$x\in\mathbb{R}$ או $x\in\mathbb{C}$ מבינים היטב. כש-$x\in K_p$, K שדה מספרים,

$\mathbb{F}_p$ בנוסף סופי.

<u>תרגיל:</u> נסמן v - ההערכה ה-p-אדית המנורמלת על K_p, $e=v(p)=e(F/p)$.

צ"ל, אם $x\in K_p$ עם $v(x)>\frac{e}{p-1}$,

(1) $\exp(x)$ מתכנס, $\exp(x)=1+c$ עם $v(x)=v(c)$.

(2) $-\log(1-x)$ מתכנס, $-\log(1-x)=c'$, עם $v(c')=v(x)$.

הרחבה של שדה שלמים

$\mathcal{O}_K\subseteq K$ שדה מספרים, $p\in\mathrm{Spec}(K)$ אידיאל ראשוני.

לוקליזציה $\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}_{K,p}$ עם אידיאל יחיד

אם L/K הרחבה של שדה מספרים,

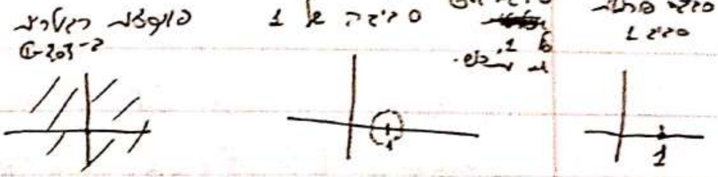
$\mathcal{O}_K \rightsquigarrow \mathcal{O}_{K,p}$ לוקליזציה

ב-$\mathbb{Q}\otimes\mathcal{O}_{K,p}$ "נשאר" כל הראשוניים מעל p, ועם "נשמרו" הדרגה

<u>אינטואיציה:</u> האינדקסים f_i ~~...~~ ומעלות הסתעפות e_i

$$\mathbb{C}[x] — \mathbb{C}[x,x^{-1}] — \mathbb{C}[x]_{x-1} — \mathbb{C}[[x-1]] — \mathbb{C}((x-1))$$

פונקציה רגולרית על $\mathbb{C}$ | פונקציה רגולרית ב-$\mathbb{C}-0$ | סביבה של 1 | analytic סביבה קטנה של 1 מספיק | סביבה פתוחה של 1



ראשוניים $\rightsquigarrow$ נקודה

השלמה $\rightsquigarrow$ סביבה קטנה

לכן נוכל להוכיח דברים יותר טובים בהשלמה (סביבה יותר קטנה)

יהי (K,v) שדה מוערך בבדידות. ותהא L/K הרחבה פרידה סופית.

ניקח - $\mathcal{O}=\mathcal{O}_v$ חוג הערכה

$\mathfrak{p}$ האידאל המקסימלי ב-$\mathcal{O}$

נסמן - $\mathcal{O}_L \supseteq \mathcal{O}$ הסגור השלם של $\mathcal{O}$ ב-L.

ניקח את הפירוק של $\mathfrak{p}$ ב-L:

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \beta_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\beta_g^{e_g}$$

נסמן ב-w_i את ההערכה ה-β_i-אדית על L. מתקיים ש-

$w_i(x) = e_i\cdot v(x)$ לכל $x\in\mathcal{O}_K$ $(\mathcal{O}_K:=\mathcal{O})$

לכן, $w_1,\ldots,w_g$ מרחיבים הערכות שקולות ל-v.

משפט הקירוב החלש מבין ש-$w_1,\ldots,w_g$ לא שקולות.

להיפך, אם w הערכה על L שמרחיבה הערכה שקולה ל-v,

אז w ~~[illegible]~~ לא ארכימדית (כי לא ארכימדית $\Leftrightarrow$ $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה

עבור הצמצום לתוך K כבר, אז היא חסומה. אזי, יש לנו -

$$\{x\in L \mid w(x)>0\} = P_w \subseteq \mathcal{O}_w = \{x\in L \mid w(x)\geq 0\}$$

נחתוך עם K, נקבל $\mathfrak{p} = P_w\cap K \subseteq \mathcal{O}_w\cap K \underset{\text{מהשקילות}}{=} \mathcal{O}_v=\mathcal{O}$. לכן,

P_w ראשוני מעל $\mathfrak{p}$.

מכאן, $P_w\cap\mathcal{O}_L=\beta_i$. לכן, w שקולה ל-w_i. לסיכום קיבלנו -

<u>משפט</u>: יהי (K,v) עם v בדידה, וחוג הערכה $\mathcal{O}_v$. תהא L/K פרידה.

$\mathcal{O}_L$ - הסגור השלם של $\mathcal{O}_v$ ב-L. אזי, יש התאמה 1-1 בין

הרחבות של v ל-L ובין ראשוניים של $\mathcal{O}_L$ מעל P_v.

(ראשוני $\mapsto$ הערכה פ-אדית)

אם $w_1,\ldots,w_g$ מתאימות ל-$\beta_1,\ldots,\beta_g$ אזי -

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \beta_1^{e_1}\cdot\ldots\cdot\beta_g^{e_g}$$

מנורמלים - חבורת ההערכה היא $\mathbb{Z}$.

אז לכל i, $e_i\cdot v = w_i|_K$.

<u>מסקנה</u>: יהי K שדה מספרים. אזי, $P_f(K)=\{\text{ראשוניים של } \mathcal{O}_K\}$.