15/5/2019

$\boxed{\text{הרצאה 9}}$

<u>תזכורת:</u> אם יש לנו טור דיריכלה $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ ו~~התכנסות~~ אם $\sum_{n\le x} a_n \ll x^{b}$, מרכזת, אזי יש התכנסות ב- $Re(s)>b$.

ראינו ל- $\zeta(s)=\sum n^{-s}$ - אנליטית ב- $\mathbb{C}$ פרט לקוטב פשוט ב- $s=1$.

הגדרנו $\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}(N\mathfrak{a})^{-s}$, כש- $\mathfrak{a}$ רצים על אידיאלים שונים מ-0 ב- $\mathcal{O}_K$. <u>חבורת</u> <u>מחלקות</u> <u>חקרן</u> היא $C_K^{\mathfrak{m}}=I^{\mathfrak{m}}/K_{\mathfrak{m},1}$. לכל $H\in C_K^{\mathfrak{m}}$ הגדרנו את $\zeta_K(s,H)=\sum_{\mathfrak{a}\in H}(N\mathfrak{a})^{-s}$. ע"י אינטגרציה ראינו ש-

$$S(n,H)=\#\{\mathfrak{a}\in H \mid N\mathfrak{a}\le n\}\sim g_{\mathfrak{m}}\cdot n$$

$$g_{\mathfrak{m}}=\frac{2^{r_1}\, reg_{\mathfrak{m}}\cdot \pi^{s}}{N\mathfrak{m}\,|\Delta_K|^{1/2}\,w_{\mathfrak{m}}}$$

$2^{r_0}\cdot 2_{\mathfrak{m}_0}$

<u>מסקנה:</u> פונקציית הזטא $\zeta_H(k,s)$ אנליטית ב- $Re(s)>1$ וגם $g_{\mathfrak{m}}=\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta_H(s,k)$.

בפרט הקוטב לא תלוי ב- $H\in C_K^{\mathfrak{m}}$. נזכיר את הקבועים:

* r = # שיכונים ב- $\mathbb{R}$
* $s=\frac{1}{2}\cdot$ # שיכונים מרוכבים
* $reg_{\mathfrak{m}}$ = נפח של $\ell(\mathcal{O}_K^*\cap K_{\mathfrak{m},1})$
* $w_{\mathfrak{m}}$ מס' שורשי היחידה ב- $K_{\mathfrak{m},1}$
* Δ_K - דיסקרימיננטת השדה

<u>מסקנה:</u> $\zeta_K(s)=\sum_{H\in C_K}\zeta_K(s,H)$ (לוקחים מודולוס $\mathfrak{m}=1$) אנליטית ב- $Re(s)>1$, $\lim_{s\to 1^+}(s-1)\zeta_K(s)=g_K\cdot h_K$. (כאן $g_K=g_{\mathfrak{m}}$ ל- $\mathfrak{m}=1$)

<u>מסקנה:</u> תהי L/K הרחבה ~~גלואה~~ סופית של שדות מספרים. אז יש ∞ ראשוניים $\mathfrak{p}\in P_f(K)$ שמתפצלים לגמרי ב- L.

בה"כ ההרחבה שלה גלואה (סגור גלואה, ומתפצל לגמרי בגלואה $\Leftrightarrow$ מתפצל בהרחבה)

<u>דוגמה:</u> יש ∞ ראשוניים שהם $p\equiv 1 \pmod n$. כי $p\equiv 1 \pmod n \Leftrightarrow \left(\frac{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}}{p}\right)=1\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow$ p מתפצל לגמרי.

$\Updownarrow$

$e=f=1$

<u>הוכחה:</u> לכל $\mathfrak{P}\in P_f(L)$ נסמן $f_{\mathfrak{P}}$ - הדרגה היחסית מעל K.

$$\sum_{\mathfrak{P}\in P_f(L)}N\mathfrak{P}^{-s}-\sum_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}=1}N\mathfrak{P}^{-s}=\sum_{\substack{\mathfrak{P}\in P(L)\\ f_{\mathfrak{P}}\ge 2}}N\mathfrak{P}^{-s}=\sum_{p\in P_f(\mathbb{Q})}\sum_{\substack{\mathfrak{P}/p\\ f_{\mathfrak{P}}\ge 2}}p^{-f_{\mathfrak{P}/\mathbb{Q}}s}\le$$

$$\le [L:\mathbb{Q}]\sum_{p\in P_f(\mathbb{Q})}p^{-2s}\le [L:\mathbb{Q}]\sum\frac{1}{n^2}=O(1)$$

(נשאר להוכיח ש- $\sum_{P\in P_k(L)} NP^{-s} \xrightarrow[s\to 1]{} \infty$. ולכן

$$\sum_{P\in P_k(L)} NP^{-s} = -\log(s-1) + O(1) \xrightarrow[s\to 1]{} \infty$$

(כי ל- $\zeta_K(s)$ יש קוטב ב- $s=1$,

$$-\log \sum Na^{-s} = \sum \log(1-NP^{-s}) = \sum NP^{-s} + O(1)$$) □

משפט: ל- $\zeta_K(s,H)$ יש המשכה אנליטית ל- $Re(s)>1-\frac{1}{d}$, $d=[K:\mathbb{Q}]$, פרט לקוטב פשוט ב- $s=1$.

הוכחה: הערכה

$$S(n,H) \sim \overset{a}{\cancel{?g_H}} \cdot n$$

לכן נותן $Re(s)>1$. לא נותן הערכה

$$(*) \quad S(n,H) \sim \overset{a}{\cancel{?g_H}} \cdot n + O(n^{1-1/d})$$

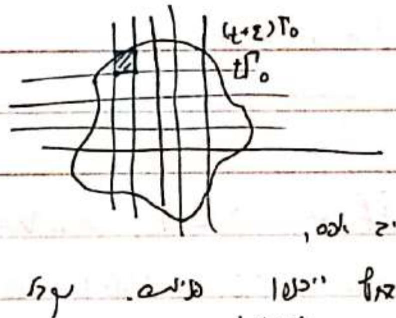
כן נותן הארכה ל- $Re(s)>1-1/d$, כי ע"י הזיהוי הראשון

$$\zeta_H(s,H) - a\cdot\zeta_K(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot n^{-s} \quad , \sum_{n\le x} b_n = (S(n,H)-an)$$
$$\left|\sum_{n\le x} b_n\right| \le O(n^{1-1/d})$$

ולכן, ממשפט שהיה לנו, $\zeta_K(s,H)-a\zeta_K(s)$ - אנליטית ב- $Re(s)>1-\frac{1}{d}$, $\zeta_K(s)$ - אנליטית בכל $\mathbb{C}$ פרט לקוטב ב- $s=1$ כי' [כידוע], ולכן $\zeta_K(s,H)$ אנליטית ב- $Re(s)>1-\frac{1}{d}$ עד קוטב פשוט ב- $s=1$. נוכיח את הערכה (*)

איך חישבנו את $S(n,H)$? כיסינו את ברשת

עבור $t^d = nN_H$, $M(t) = w_H S(n,K) =$ מס' נקודות סריג של L' ב- $t\Gamma_0$



ליפשיציות – השכונות מסדר גודל ~~של~~ השפה. נניח את זה פורמלית

ראינו קודם $M(t) \approx t^d \frac{Vol(\Gamma_0)}{Vol(L')}$.

אם נוסיף ε,

$$M(t) \le (t+\varepsilon)^d \frac{Vol(\Gamma_0)}{Vol(L')}$$

בגלל ש- $\varepsilon\Gamma_0$ יכיל את המקבילון סביב אפס,

ובגלל התכונה ש- $\frac{1}{2}$ בכפה t אבל לא ייכנסו פנימה. ועוד

$$(t-\varepsilon)^d \frac{Vol(\Gamma_0)}{Vol(L')} \le M(t) \le (t+\varepsilon)^d \frac{Vol(\Gamma_0)}{Vol(L')}$$

$$\Leftarrow M(t) = t^d \frac{Vol(\Gamma_0)}{Vol(L')} + O(t^{d-1})$$ □

פונקציות L

רקע: קרקטרים של חבורה אבלית סופית

G - חבורה אבלית סופית, נזכיר:

$\hat{G} = \{\chi : G \xrightarrow[\text{הומו'}]{} \mathbb{C}^*\}$ חבורה.

נשתמש הקרקטרים הבאים: (הפעולה - כפל נקודתי)

משפט: $\hat{G} \cong G$. [בפרט $\chi(G) \subseteq \mu(|G|)$]

הוכחה: נניח תחילה ש- G ציקלית, $G=\langle g\rangle$, $n=|G|$. ניקח $\xi\in\mu_n$ שורש יחידה פרימיטיבי ונגדיר $\chi(g)=\xi$. ~~...~~ מספיק ... $\hat{G}$ הוואלט, ואז $n=\mathrm{ord}(\chi)$, ואז $\hat{G}\cong G$.

אם $G=G_1\times G_2$ אז ברור ש- $\hat{G}=\hat{G}_1\times\hat{G}_2$ וזה נותן. □

יש העתקה טבעית:

$$G\longrightarrow\hat{\hat{G}}$$
$$g\longmapsto(\chi\mapsto\chi(g))$$

חח"ע ולכן על. ולכן $G\cong\hat{\hat{G}}$ באופן טבעי.

משפט: (אורתוגונליות הקרקטרים)

(1) $\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\chi_2(g)=\begin{cases}0, & \chi_1\neq\chi_2^{-1}\\ 1, & \text{אחרת}\end{cases}$ ובפרט (*) $\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi(G)=\begin{cases}1, & \chi=\chi_0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

(2) $\frac{1}{\#G}\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(g)\chi(h)=\begin{cases}0, & g\neq h^{-1}\\ 1, & \text{אחרת}\end{cases}$ ובפרט $\frac{1}{\#G}\sum_{\chi\in\hat{G}}\chi(g)=\begin{cases}1, & g=1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$

הוכחה: די להוכיח אחד מהם כי $G=\hat{\hat{G}}$. נוכיח את (*):

$$\sum_{g\in G}\chi(g)=\chi(h)^{-1}\cdot\chi(h)\sum_{g\in G}\chi(g)=\chi(h^{-1})\sum_{g\in G}\chi(hg)=\chi(h)^{-1}\sum_{g\in G}\chi(g)$$

$\chi=\chi_0$ - ברור

אם נניח $\chi\neq\chi_0$ וניקח h כך ש- $\chi(h)\neq1$ $\Leftarrow$ זה 0. □

משפט: יהי u משתנה, G אבלית, $g\in G$ מסדר f. אז

$$(1-u^f)^{|G|/f}=\prod_{\chi\in\hat{G}}(1-\chi(g)u)$$

הוכחה: נתבונן במרחב

$$V=L^2(G)=\{f:G\longrightarrow\mathbb{C}\},\ \dim V=|G|$$

G פועלת על $L^2(G)$ ע"י (נסמן) -

$$f^g(h)=f(gh)$$

נסתכל על g כאופרטור ליניארי על V (נסמן ρ_g) - יש בסיס ~~...~~ ווקטורים עצמיים, $\hat{G}=\{\chi_1,\dots,\chi_{|G|}\}$.

$$\chi_i^g(h)=\chi_i(gh)=\chi_i(g)\chi_i(h)$$

כלומר כל אחד מהם הוא ו"ע, עם ע"ע $\chi_i(g)$. ואז מפה אחד הפולינום האופייני (?) (-1):

$$\det(1-u\rho_{g^{-1}})=\det\begin{pmatrix}1-\chi_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\chi_{|G|}(g)\end{pmatrix}=\prod_{\chi\in\hat{G}}(1-\chi(g)u)$$

הפולינום המינימלי הוא $1-u^f$ שכן g מסדר f, ולו ז"א מופיע אותו מספר פעמים, כי זה החוק ולכן היסוד k לא ערך של בגי מתאים לגביו. $\square$

יהי K שדה מספרים, $\mathfrak{m}$ מודולוס, $C_K^{\mathfrak{m}}$ חבורת מחלקות הקרן, $\chi: C_K^{\mathfrak{m}} \to \mathbb{C}^*$ קרקטר. נרחיב את χ אל $I_{\mathfrak{m}}$ ע"י

$$\chi(\mathfrak{a}) := \chi(\mathfrak{a} \cdot P_{\mathfrak{m},1})$$

נגדיר

$$L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a} \in I^{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} =$$

$$= \sum_{\alpha \in C_K^{\mathfrak{m}}} \chi(\alpha) \sum_{\mathfrak{a} \in \alpha} N(\mathfrak{a})^{-s} =$$

$$= \sum_{\alpha \in C_K^{\mathfrak{m}}} \chi(\alpha) \zeta_K(s,\alpha)$$

__מסקנה:__ ① אם $\chi \neq \chi_0$ אז $L(s,\chi)$ אנליטית ב-$Re(s) > 1-\frac{1}{n}$ (אין קוטב ב-$s=1$)
② אם $\chi = \chi_0$ אז $L(s,\chi)$ אנליטית ב-$Re(s) > 1-\frac{1}{n}$ פרט לקוטב פשוט ב-$s=1$ עם שארית $h_{\mathfrak{m}} \cdot g_{\mathfrak{m}}$ כש-$h_{\mathfrak{m}} = |C_K^{\mathfrak{m}}|$.

__הוכחה:__ $\zeta_K(s,\alpha)$ - כולן אנליטיות ב-$Re(s) > 1-\frac{1}{n}$ פרט ל-$s=1$ ב-$s=1$,

$$\lim_{s \to 1} (s-1) L(s,\chi) = \lim_{s \to 1} \sum_{\alpha \in C_K^{\mathfrak{m}}} \chi(\alpha)(s-1)\zeta_K(s,\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha \in C_K^{\mathfrak{m}}} \chi(\alpha) g_{\mathfrak{m}} = \begin{cases} 0, & \chi \neq \chi_0 \\ g_{\mathfrak{m}} h_{\mathfrak{m}}, & \chi = \chi_0 \end{cases}$$
$\square$

__מכפלת אוילר__

__משפט:__ עבור $Re(s) > 1$,

$$L(s,\chi) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \\ \text{ראשוני}}} (1-\chi(\mathfrak{p}) N_{\mathfrak{p}}^{-s})^{-1}$$

בפרט, אם $\mathfrak{m}=1$, $\chi = \chi_0$,

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{ראשוני}} (1-\chi(\mathfrak{p}) N_{\mathfrak{p}}^{-s})^{-1}$$

__הוכחה:__ תרגיל. $\square$

__הרחבות ציקלוטומיות__

נאמר שהרחבה L/K ציקלוטומית אם $L \subseteq K(\xi)$ עבור ξ שורש יחידה.

__תזכורת:__ (העתקת ארטין)

L/K אבלית, נסמן $G = Gal(L/K)$. יהי $\mathfrak{m}_0$ אידיאל ב-O_K, כך ש- $\mathfrak{m}_0 \nmid \mathfrak{p} \in P(L/K) \Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ לא מסועף. (כלומר אידיאל שמחלק דיסקרימיננטה)

ועוד הכללה

$$\phi_{L/K} : I^{\mathfrak{m}} \longrightarrow G$$

$$\phi_{L/K}\left(\prod \mathfrak{p}_i^{e_i}\right) = \prod \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{e_i}$$

(G אבלית)

$\mathrm{im}\,\phi_{L/K} = ?$, $\ker \phi_{L/K} = ?$

<u>טענה:</u> תהי L/K הרחבה ציקלוטומית כך ש- $L \subseteq K(\xi)$, ξ שורש יחידה מסדר k, $k \mid \mathfrak{m}$ מודולוס שמקיים ~~...~~. אזי $\ker\phi_{L/K} \supseteq \iota(K_{\mathfrak{m},1})$ ובפרט ניתן להגדיר את $\phi_{L/K}$ כ-$C\ell^{\mathfrak{m}}$.

<u>הוכחה:</u> הראשוניים המסתעפים ב- L מחלקים ~~...~~ את k.

~~לכן $\mathfrak{m}$ ...~~

$$\begin{array}{ccc} K & — & L \\ | & & | \\ \mathbb{Q} & — & \mathbb{Q}(\xi) \end{array}$$

ולכן לא $\mathfrak{p}$ מסתעף את $\mathfrak{m}$ חוקי. ~~...~~ בה"כ ניתן להניח $L=K(\xi)$ (כי ניתן לצמצם את הטענה ל- ϕ). ואז $Gal(L/K) \le (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, ע"י הזיהוי

1:1 מסתעף בה ⇒ לא מסתעף ב- L/K

$$\sigma \mapsto i \iff \sigma(\xi) = \xi^i$$

נראה שהגרעין של העתקת ארטין מכיל תחום, כלומר $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \equiv 1 \pmod{k}$ עבור $\mathfrak{a} \in I^{\mathfrak{m}}$, אז $\phi_{L/K}(\mathfrak{a})=1$.

~~...~~ לפי העתקת ארטין ב- $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$

ניקח $x \in K_{\mathfrak{m},1}$. יודעים ש- $x \overset{*}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{m}}$. כיוון ש- $k \mid \mathfrak{m}$, $x = 1+ky$, $y \in K$.

אז,

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x) = \prod_{\sigma: K\to\mathbb{C}} \sigma(1+ky) = \prod_{\sigma}(1+k\sigma(y)) = 1 + k\underbrace{*}_{\text{הביטוי רצ' מוגדר כי ב-}K} \equiv 1 \pmod{k}$$

ולכן $x \in \ker\phi_{L/K}$.

B...:

ונראה שההעתקה על.

<u>מסקנה:</u> $\phi_{L/K}$ הנ"ל על אם L/K ציקלוטומית. כאשר ... $L=K(\xi)$, $ord(\xi)=n$, $n \mid \mathfrak{m}$ אז $\phi_{L/K}$ על ולכל $\chi \in \widehat{Gal(L/K)}$ לא טריוויאלי,

$$L_{\mathfrak{m}}\left(1, \chi\circ\left(\frac{L/K}{\cdot}\right)\right) \neq 0$$