הדפסת תלת מימד שיעור 3

27 במרץ 2017

הרוחב של פוליהדרון: המטרה שלנו: אנחנו רוצים לקחת מודל STL כבד, ולהניח את המודל ככה שהוא יצטרך מינימום שכבות בהדפסה.
זאת אומרת למצוא את הרוחב שלו ולסובב אותו ככה שהוקטור שמגדיר את הרוחב בכיוון Z.
ניתן יהיה להשתמש בקירוב, זאת אומרת נצטרך לדווח על רוחב שהינו $(1+\varepsilon)w$ מהרוחב המקורי.

- אלגוריתם quasi output sensitive לחישוב רוחב פוליהדרון
- נדבר על אפרוקסימציה
- הכללה: penetration depth (עומק חדירה)
- סכומי Minkowsk

תזכורת: נתון לנו פוליהדרון תלת מימדי, ואנו רוצים למצוא את המרחק בין זוג המישורים המקבילים הקרובים ביותר הנוגעים בפוליגון.
הנורמל של אחד המישורים האלו הוא יהיה הנורמל שיעניין אותנו (הנורמל של המשישור השני יהיה הפוך)

תכונות של הבעיה:

- אנו מדברים על פוליהדרון קמור כי רוחב פוליהדרון יקבע על פי רוחב הקמור שלו
- אם בפוליהדרון קמור יש N קודקודים אזי יש לכל היותר $3n-6$ קשתות ו$2n-4$ פאות.
- לפי נוסחת אויילר לפוליהדרון קמור (מפה מישורית) מתקיים: $V-E+F=2$
- כמו כן מתקיים $2E\geq 3F \leftarrow F\leq \frac{2}{3}E$ ולכן

$$2=V-E+F\leq \frac{2}{3}E-E+n=-\frac{1}{3}E+n \iff E\leq 3n-6$$

- $$F\leq 2n-4$$

- הזוגות בנקודות ההשקה של המישורים יכולות להיות: $V-F, E-E$ (השאר לא אפשריים או שניתן לעשות רדוקציה מהם למקרים אלו)
- הבעיה העיקרית היא עם המקרה E־E משום שבמקרה זה יש לנו $O\left(n^2\right)$ זוגות.

אלגוריתם כללי למצוא רוחב של קבוצת נקודות בתלת־מימד:

(אלגוריתם quasi output sensitive לחישוב רוחב פוליהדרון)

1. ניקח את ספירת היחידה בתלת מימד S^2
2. נכתוב על דיאגרמת גאוס את כל הקודקודים שמתאימים לנורמלים החיצוניים של הפוליטופ.
3. קשת בדיאגרמה ־ אוסף הנורמלים למישורים שנוגעים בקשת בפוליהדרון שהיא השפה של שתי פאות
4. 3 קשתות יחד כולאות פאה שמתאימה לקודקוד בין 3 פאות בפוליטופ המקורי
5. המבנה שמצאנו מהווה דואלי לפוליטופ (אם נוסיף רשומה של קורדינטות של הקודקוד לכל פאה על דיאגרמת גאוס שמתאימה לו קיבלנו מפה שמגדירה באופן יחיד את הפוליהדרון).
6. סיבוכיות המבנה $O\left(n\right)$

7. במישור רצינו לדעת על את הנקודה האנטיפודלית לכל נקודה על מעגל גאוס, פה נרצה לכל נקודה על שפת S^2 נמשיך את הנקודה האנטיפודלית שלה, זאת אומרת הנקודה שאם היינו ממשיכים קו ישר ממנה דרך הראשית היינו מגיעים אליה. לשם כך נשקף את הכדור דרך הראשית.

8. הערת אגב צריך לדעת מזה $DCEL$.

9. הערה נוספות, ניתן לעשות זאת על ידי DCEL על מעגל, וניתן להטיל חצי מעגל על מישור, לשקף את החצי מעגל השני והטיל גם אותו על אותו מישור ולעשות map overlay

10. כעת נחפש כל זוג קשתות נחתכות וכל זוג קודקוד־פאה כך שהנקודה בתוך הפאה, ונחשב את המרחק בניהם וניקח את המינימלי

11. סיבוכיות: $O\left(n+k\right)$ כאשר k כמות החיתוכים של קשת־קשת.

12. אם נשתמש בטיטואו לצורף הmap overlay נקבל סיבוכיות $O\left(\left(n+k\right)\log n\right)$ סך הכל.

אלגוריתם של Agarwal-sharir בסיבוכיות $O\left(n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$

- הם מחלקים את כל הקשתות לקבוצות, כך שבכל תת קבוצה כל הקשתות הכחולות נחתכות עם כל הקשתות האדומות.
- כעת נשאר לבדוק את המועמד להיות הרוחב על ידי כך שאנו **לא** עוברים על כל הזוגות של קשתות נחתכות.
- התת אלגוריתם שעובד כאם לוקח קבוצה של N ישרים אדומים וN ישרים כחולים, כעת נחזור לישרים המתאימים בפוליטופ המקורי ונחפש את זוג הישרים הקרובים ביותר.
- את הישרים הכחולים אנו מתרגמים (באורך פלא) למישורים במרחב 4 מימדי, את האדומים לנקודות במרחב 4 מימדי (גם באורך פלא), וכעת עושים חיפוש בינארי (או parametric search) כדי למצוא ביעילות את הזוגות האלה.
- מעט בנפנוף ידיים, כדי להבין לעומק יש ללכת לספרות

אסטרטגיות מעניינות:

- נתסכל על גריד של כיוונים ונחשב בכל כיוון את הרוחב
- ניתן לפשט את הפוליטופ, ואז לחשב את הרוחב, אם נוכיח שהפישוט לא משנה את הרוחב ביותר מε ניצחנו.
- coresets, קחו חלק מנקודות הקלט, תפעילו עליהם את האלגוריתם הטוב שלנו על תת־הקבוצה, ואם בחרנו את את ה coreset אזי התוצאה תיהיה קרובה ε לרוחב האמיתי.

מה יכול לקרות רע בחישוב קמור: מומלץ להסתכל על דוגמאות במצגת באתר של דן הלפרין

מה אנו צריכים באלגוריתם שלנו כדי שיעבוד: פרידקטים מדוייקים!
לשם כך נישאר תמיד במספרים רציונלים, מכאן שאם נצטרך לדווח את הרוחב, נדווח את הרוחב בריבוע

vertical decomposition-prisms: אנחנו רוצים לקחת פוליהדרון ולחלק אותו לפריזמות (טרפזים תלת מימדיים)

הכללת רוחב הפוליגון: penetration depth(עומק החדירה) נתונים שני פוליהדונים קמורים בתלת מימד, עומק החדירה שלהם הוא המרחק המינמלי שאנחנו צריכים להזיז את אחד הפוליהדרונים כך שהפנים של שני הפוליהדרונים לא נחתכים.

$$\pi\left(A,B\right)=min\left\{ \left|\left|t\right|\right|\left|int\left(A+t\right)\cap B=\phi,t\in\mathbb{R}^{3}\right.\right\}$$

טענה 0.1 עבור פוליהדרון קמור P מתקיים $width\left(P\right)=\pi\left(P,P\right)$
נסמן בw את הרוחב ובv את הוקטור שמגדיר אותו,
נסמן בs את מרחק החדירה המינימלי ואת u הוקטור שמגדיר אותו.
וכן כדי להבדיל בין הפוליגון נסמנם P_1,P_2

- $s\le\left|\left|v\right|\right|$ אם נזיז את P_1 בv נקבל כי החיתוך של P_1 וP_2 ריק, ולכן מתקיים $s\le\left|\left|v\right|\right|$
- $w\le\left|\left|u\right|\right|$ יש לי וקטור u כך שP_1 וP_2 נפרדים אם מזיזים את p_1 בu, ולכן יש מישור שמפריד בינהם לאחר ההפרדה ונוגע בנקודת ההשקה, נעתיק את המישור הזה מצידו השני של P ונקבל בדיוק הוקטור u ולכן אורכו של u חסם לרוחב.
- $s\le\left|\left|v\right|\right|=w\le\left|\left|u\right|\right|=s$

חישוב עומק חדירה:

1. נסמן את מספר הקודקודים של A בM ומספר הפאות של B בN
2. ניתן לבדוק אם הם נחתכים על ידי LP בזמן $O\left(n+m\right)$
3. אם הפוליהדרונים לא נחתכים אזי מתקיים $\pi\left(A,B\right)=0$
4. ... כעת דרוש סכומי מינקובסקי

סכומי מינקובסקי: על נקודות: $\{(x_1,y_1)\}\oplus\{(x_2,y_2)\}=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\}$
על פוליגונים: $A\oplus B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$
סכום מינקובסצקי על פוליגונים קמורים בכל כיוון, הוא חיבור של 2 הנקודות הקיצוניות ביותר בכיוון זה.
אם לפוליגונים קמורים N,M קודקודים לסכום מינקובצקי לכל היותר $O\left(m+n\right)$ קודקודים.
אם לפוליהדרונים קמורים M,N קודקודים לסכום מינקובצקי $\theta\left(nm\right)$ קודקודים.