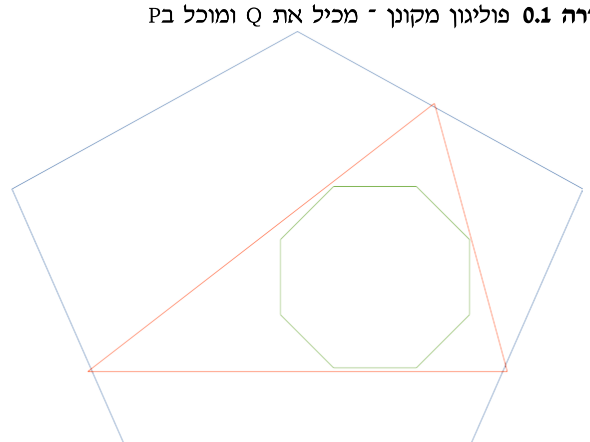
הרצאה 6

15 במאי 2017

סימפליפיקציות:

בעיית דו - מימדית: נתונים שני פוליגונים **קמורים** P,Q P מכיל את Q.
אנו רוצים למצוא פוליגון שמקונן בינהם, כאשר מספר קודקודיו מינימלית.

הגדרה 0.1 פוליגון מקונן - מכיל את Q ומוכל בP



.

הגדרה 0.2 פוליגון מקונן מינימלי - לא קיים פוליגון מקונן עם כמות קודקודים קטנה ממנו.

.

הגדרה 0.3 קטע ישר תומך
קטע שמשיק לQ בשפה (ואינו נכנס אליו), ונשען בשתי נקודות על P

.

הגדרה 0.4 קטע ישר תומך של נקודה על שפת P l_a, ושטחו R_a
נשים לב שכאשר ניקח נקודה A על שפת P הקטע הישר התומך שיוצא ממנו מוגדר באופן יחיד (אנו הולכים תמיד נגד כיוון השעון)
כמו כן נסמן את השטח שחסום בין הישר לבין Q בR_a

.

למה 0.5 פוליגון מקונן מינימלי הינו קמור.
זאת משום שבהנחה שיש לנו פוליגון קמור מינילי שאינו קמור.
ניקח את הקמור שלו, נשים לב שהוא מוכל בP משום שP קמור,וכן איבדנו לפחות נקודה אחת משום שאחרת נקבל סתירה להיותו לא קמור.
הקמור של הפוליגון מהווה פוליגון מקונן עם כמות קודקודים נמוכה ממנו, בסתירה להיותו פוליגון מקונן מינימלי.

.

למה 0.6 R_a חייב להכיל לפחות קודקוד אחד של כל פוליגון מקונן

.

הגדרה 0.7 פוליגון תומך
ניקח נקודה a_0 על שפת P̧ וניקח את הקטע הישר התומך שלה, ניקח את הקצה שלהa_1 ונחזור על התהליך.
בסוף יקרו אחד משני מקרים:
א) הקטע האחרון יתחבר בדיוק לתחילת הקטע הראשון
ב) הקטע האחרון לא יתחבר ונצטרך להוסיף קטע נוסף שיסגור את הפוליגון התומך

.

נשים לב שבכל R_{a_i} חייב להיות קודקוד של פוליגון מקונן, עבור כל פוליגון מקונן.
במקרה א) סיימנו משום שחייבים להיות בכל פוליגון מקונן לפחות כמות קודקודים כמו שיש לנו (אחד לכל R_{a_i})
ומכאן שמצאנו פוליגון מקונן מינימלי

למה 0.8 מכאן שלכל $a_0 \in P$ מתקיים כי לS_{a_0} (הפולינום התומך של a_0) יש לכל היותר קודקוד אחד יותר מלפוליגון המינימלי.

.

למה 0.9 לכל פוליגון מינימלי M נוכל להפוך את M לפוליגון תומך מבלי לשנות את כמות הקודקודים
ניקח צלע v_1v_2 ונדחוף את v_2 לשפת P ונסמנה v_2'
כעת ניקח את צלע $v_2'v_3$ ונדחוף את v_3 לשפת P ונסמנה v_3'
ונחזור על התהליך עד שנסיים עם כל הצלעות
בסוף התהליך קיבלנו פוליגון תומך
כעת ניקח צלע $v_1'v_2'$ וניקח את קודקוד v_2' ונסיע אותו (נגד כיוון השעון), על שפת Q עד שהצלע שלנו תשיק לP̧ נסמנו v_2''.
ונחזור על התהליך עד שנסיים עם כל הסגמנטים (אולי מלבד האחרון), כעת גם כל הסגמנטים שלנו הם סגמנטים תומכים.

אלגוריתם: מטרתינו: לבדוק האם ניתן לצמצם באמת בקודקוד אחד (קיימת הזזה של הפוליגון שלנו כך שזוג קודקודים מתאחדים, או שזהו לא המצב)
כעת נרצה עבור צלע v_1v_2, להסיע את v_1 על פני הצלע שהוא משיק לה בP̧ ולחשב איפה תיהיה v_2 בהתאם.
הנוסחא היא שתתקבל ממשחק עם טריגונומטריה

$$x_2 = \left(\frac{c_1 + c_2x_1}{c_3 + c_4x_1}\right)$$

עבור קבועים c_1, c_2, c_3, c_4
אם נמשיך לפתח את הטריגונומטריה עבור x_3 ונקבל

$$x_3 = \left(\frac{\mathrm{d}_1 + d_2x_2}{d_3 + d_4x_2}\right)$$

ובפרט

$$x_3 = \left(\frac{e_1 + e_2x_1}{e_3 + e_4x_1}\right)$$

הנוסחה הזאת משתנה בשלוש מקרים -

1. v_iמגיעה לקצה קטע בP
2. v_{i+1} מגיע לקצה קטע בP
3. הקטע v_iv_{i+1} משנה קטע השקה בQ

נסתכל על שלושת האירועים האלו, וניקח את הקרוב ביותר מבינהם
נעשה זאת צלע צלע,ונבדוק את ערך השינוי הנמוך ביותר וניקח אותו.
כעת ניקח את כל הקודקודים ונזיז אותם בערך שמצאנו
לאחר שעשינו את זה נעדכן את הפונקציות של כל הצלעות $O(k)$ כאשר K כמות הצלעות בפוליגון שהתחלנו איתו.
כעת נחזור על התהליך עד שנחזור להתחלה
בכל שלב נבדוק אם קיבלנו ששני קודקודים התאחדו, אם כן סיימנו, ונחזיר את הפוליגון שקיבלנו.
אם זה לא קרה לאורך כל התאריך נוכל להסיק שלא קיים פוליגון כזה ולכן נחזיר את אחד מהפוליגונים הקודמים שהגענו אליהם.

.

סיבוכיות:

1. איתחול המערכת, עבור קודקוד A על שפת Q מציאות הצלע הP בו הוא משיק ביצירת הקטע התומך שלו ומציאת הפוליגון התומך $O\left(n\right)$
2. חישוב הקבועים בנוסחאות עבור צלעות הפוליגון התומך $O\left(k\right)$
3. contact changes הטיול סביב פוליגון Q והמעבר לפי הפונקציות$O\left(n\right)$
4. לכל מעבר (3), עידכון הנוסחאות $O\left(k\right)$

סך הכל $O\left(nk\right)$

(אפשר לשפר את האלגוריתם ל$O\left(n\log k\right)$