29/11/2016 הרצאה טו:

תזכורת:

* מעכשיו והלאה, תמיד נניח $f:M^m\longrightarrow N^n$ חלקה, יריעות קשירות.

הגדרה:

$y\in N$ נקראת ערך רגולרי אם D_pf על לכל $p\in f^{-1}(y)$
(אחרת y ערך קריטי, נקודה קריטית).

משפט:

אם y ערך רגולרי, אז $f^{-1}(y)$ יריעה חלקה, ו-:

$$\dim f^{-1}(y)=\dim(M)-\dim(N)$$

למה:

$X\subset\mathbb{R}^k$, $Y\subseteq\mathbb{R}^l$ סביבות פתוחות של הראשית. $k\ge l$

$\pi:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^l$ ההטלה של l הקורדינטות הראשונות.

$f:X\longrightarrow Y$ חלקה, $f(0)=0$, D_0f על.

אזי יש סביבה $O\subset X$ פתוחה של הראשית ודיפאו

$F:O\longrightarrow F(O)\subseteq\mathbb{R}^k$ כך ש-: $F(O)$ פתוחה, $F(0)=0$

$$f\circ F^{-1}=\pi$$

סקיצה:

D_0f על, אחרי שינוי קורדינטות:

$$D_0f=\left(Id_{l\times l}\mid 0_{l\times(k-l)}\right)$$

נגדיר:

$$F(x_1,\dots,x_k)=(f(x_1,\dots,x_k),x_{l+1},\dots,x_k)$$

נשים לב: $f=\pi\circ F$

ואם $\{e_i\}$ בסיס סטנדרטי

$$D_0F(e_i)=D_0f(e_i)=e_i \qquad 1\le i\le l$$

$$D_0F(e_i)=D_0f(e_i)+D_0Id(e_i)=e_i$$

$\Longleftarrow$ D_0F איזו, הוכחנו ∎

הוכחת המשפט:

(U,ϕ) מפה של p. $(p\in f^{-1}(y))$, להבודות פתוחות סביב הנקודות

(V,ψ) מפה של $f(p)$

$D_p f$ על $\Longleftarrow$ $D_{\phi(p)}(\psi\circ f\circ \phi^{-1})$ על.

בה"כ $\phi(p)=0$, $\psi(y)=0$ $(y=f(p))$

מהלמה הקודמת $\Longrightarrow$ קיימת סביבה פתוחה $O_{\phi(p)}\subset \phi(U)$

ודיפאו' $F_{\phi,p,\psi}: O_{\phi(p)} \longrightarrow F_{\phi,p,\psi}(O_{\phi(p)})$

פתוחה.

$F(\phi(p)) = F(0)=0$

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}\circ F^{-1}_{\phi,p,\psi} = \pi$$

נגדיר:

$$\Omega_{p,\phi,\psi} = F_{p,\phi,\psi}(O_{\phi(p)})\cap \ker\pi$$

$\ker \pi = \mathbb{R}^{\dim(M)-\dim(N)}$

1) Ω פתוחה ב- איחוד פתוחות

2) $0\in\Omega_{p,\psi,\phi}$

3) $\psi\circ f\circ\phi^{-1}\circ F^{-1}_{p,\phi,\psi}(\Omega_{p,\psi,\phi}) = \pi(\Omega_{\phi,p,\psi}) = 0 = \psi(y)$

נקח, $U_{p,\phi,\psi} = \phi^{-1}\circ F^{-1}_{\phi,p,\psi}(\Omega_{p,\phi,\psi})\subset M$

$p\in U_{p,\phi,\psi}$ ו-

$$f(U_{p,\phi,\psi}) = \psi^{-1}\circ\psi\circ f(U_{p,\psi,\phi}) = \psi^{-1}(\psi(y)) = y$$

בפרט: $U_{p,\phi,\psi}\subset f^{-1}(y)$

טענה:

$(U_{(\phi,p,\psi)}, F_{\psi,p,\phi}\circ\phi)$ אטלס של מפות מתואמות עבור $f(y)$.

(לא ברור שהמפות האלה הם כיסוי)

למה מתואמות?

$$(F_{\tilde p,\tilde\phi,\tilde\psi}\circ\tilde\phi)\circ(F_{p,\psi,\phi}\circ\phi)^{-1} =$$

$$= F_{\tilde p,\tilde\phi,\tilde\psi}\circ(\tilde\phi\circ\phi^{-1})\circ(F_{\phi,p,\psi})^{-1}$$

וזה הרכבה של דיפאומורפיזמים.

דוגמא:

$\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\psi(x,y) = y^2 - x^2$

היעקוביאן: $\pm(2x,2y)$. פרט ל-0 הכל ערכים רגולריים

ב-0, איחוד של שני ישרים - לא יריעה. $(x=\pm y)$

משפט הדרגה הקבועה:

$f: M^m \to N^n$ חלקה, $\mathrm{rank}(f)=k$ בכל הנקודות.

אזי לכל $p\in M$; $f(p)\in N$ יש מפות סביבן:

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)$$

הוכחה: (סקיצה)

שלב 0 - מספיק להוכיח את הטענה ב-$\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. (תרגול)

המשך:

אחרי סידור מחדש של אינדקסים.

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right)\Big|_{i,j=1}^{k}(0)\neq 0$$

משפט III $\Leftarrow$

$$\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

$$(x_1,\dots,x_m)\mapsto(f^1(x),\dots,f^k(x),x^{k+1},\dots,x^m)$$

דיפאו מקומי של הראשית.

נרכיב:

$$f\circ\Phi^{-1}(x^1,\dots,x^m) = (x^1,\dots,x^k, f^{k+1}\circ\Phi^{-1}(x),\dots,f^n\circ\Phi^{-1}(x))$$

אם q נקודה כלשהי בתחום של $f\circ\Phi^{-1}$ היעקוביאן שם הוא:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline * & \frac{\partial(f^j\circ\Phi^{-1})}{\partial x_i} \end{array}\right) \leftarrow i,j>k$$

עבור $i,j>k$, מכיוון שהדרגה של f היא k

$$\frac{\partial(f^j\circ\Phi^{-1})}{\partial x_i}(q)=0$$

במילים אחרות עבור $j>k$ ההרכבה $f^j\circ\Phi^{-1}$ אינה

תלויה בקורדינטה x_i עבור $i>k$

$f^j \circ \varphi^{-1}(x) = f^j \circ \varphi^{-1}(x^1,\dots,x^k)$ if $j>k$

נגדיר: $\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ע"י:

$$\psi(y_1,\dots,y_n) = (y^1,\dots,y^k, y^{k+1}-f^{k+1}\circ\varphi^{-1}(y),\dots,y^n-f^n\circ\varphi^{-1}(y))$$

היעקוביאן שלה בראשית:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline * & I \end{array}\right)$$

דיפאו מקומי

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)$$

■

<u>מה ראינו עד עכשיו:</u>

1) אימרסיה מקומית היא כמו שיכון

2) סבמרסיה מקומית היא כמו הטלה

(*) 3) $f^{-1}(y)$ (בסימונים הקודמים) תת יריעה משוכנת ממימד $m-n$.

תרגיל לסטודנט המשקיע: $T_p f^{-1}(y) = ?$

(כלומר, האם יש דרך טובה לתאר את המרחב המשיק ליריעה הזו).

q ערך רגולרי. קיימת סביבה $f^{-1}(q)\subset O\subset M$ כך ש- $f|_O$ סבמרסיה.

<u>ממשפט הדרגה</u> לכל $p\in f^{-1}(q)$ יש קורדינטות

$(U,x^1,\dots,x^m)$ near p

$(V,y^1,\dots,y^n)$ near q

כך ש- $f^{-1}(q)\cap U=\{p\in U \mid x^1(p)=\dots=x^n(p)=0\}$

ולפי ההגדרה שלנו של תת יריעה ממימד $m-n$.

משפט Sard

מסקנה: $f: M \to N$ קבוצת הערכים הקריטיים של f ב-N היא "בעלת מידה 0"

(S היא בעלת מידה 0 אם:

לכל מערכת קורדינטות (U,φ) הקבוצה

$$\varphi(S\cap U) \subset \mathbb{R}^n$$

בעלת מידה אפס.

פרק ד: שיכונים בתוך $\mathbb{R}^N$

טענה:

כל יריעה קומפקטית(*) ניתנת לשיכון ב-$\mathbb{R}^N$ עבור $N \gg 1$

(*) דרישת הקומפקטיות אינה הכרחית - פשוט יותר נוחה להוכחה.

הוכחה:

ניתן לבחור כיסוי סופי $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{N}$

1) $\overline{B_1(0)} \subset \varphi_i(U_i) \subset B_2(0)$

2) $\bigcup \varphi^{-1}(B_1(0)) \supseteq M$

נקח חלוקת יחידה בהתאם לכיסוי:

$$\lambda_i : M \to \mathbb{R}$$

$$\lambda_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p\in\varphi_i^{-1}(B_1(0)) \\ 0 & p\notin U_i \end{cases}$$

נגדיר: $\psi_i : M \to \mathbb{R}^d$

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i\varphi_i(p) & \text{if } p\in U_i \\ 0 & p\notin U_i \end{cases}$$

נגדיר: $\Phi : M \to \mathbb{R}^{Nd+N}$

$$\Phi(p) = (\psi_1(p), \lambda_1(p), \dots, \psi_N(p), \lambda_N(p))$$

טענה: זה השיכון המבוקש.

1) Φ אימרסיה. אם $p\in M$ אז $p\in\varphi_i^{-1}(B_1(0))$ עבור איזשהו i ולכן $\psi_i=\varphi_i$ בסביבת הנקודה.

$\Leftarrow$ $d\psi_i = d\varphi_i$ בסביבת הנקודה. $\Leftarrow$ $d_p\Phi$ חח"ע

כי $\Leftarrow$ $\operatorname{rank} d_p\Phi = m$,

2) Φ חח"ע. $p,q \in M$, $p \neq q$. נבחר i כך ש- $p \in \lambda_i^{-1}(1)$

מקרה א':

$q \notin \lambda_i^{-1}(1) \Rightarrow \lambda_i(p) \neq \lambda_i(q) \Rightarrow \Phi(p) \neq \Phi(q)$.

מקרה ב':

$q \in \lambda_i^{-1}(1)$, $\Rightarrow$ $\underbrace{\psi_i(p) = \phi_i(p)} \neq \underbrace{\phi_i(q) = \psi_i(q)}$

$\Rightarrow \Phi(p) \neq \Phi(q)$

מכיוון שהיריעה קומפקטית אזי חח"ע + אימרסיה $\Rightarrow$ שיכון

(מסקנה מהשבוע שעבר).

משפט: (H. Whitney 1936)

כל יריעה, ממימד m ניתנת לשיכון ב- $\mathbb{R}^{2m+1}$

(ב- 1944 - $\mathbb{R}^{2m}$ + יש אימרסיה לתוך $\mathbb{R}^{2m-1}$ וזה הדוק

(החסם הדוק))

Nash:

כל יריעה חלקה הינו דיפאו' לתת יריעה אלגברית ב- $\mathbb{R}^N$

Nash:

אפשר לשכן איזומטרית $(M,g) \longrightarrow (\mathbb{R}^N, d)$ - שיכון ששומר מרחקים.

משפט:

כל יריעה השיוה קומפקטית ממימד m ניתנת לשיכון ב- $\mathbb{R}^{2m+2}$

למה 1:

M האוסדורף,

$$\Delta_M = \{ (x,y) \mid (x,y) \in M \times M,\ x = y \}$$

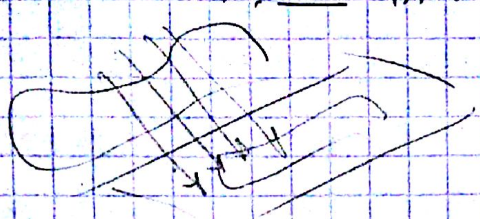
הוא סגור (נקרא טופולוגי המכפלה).

<u>טענה</u> (III) (גרסה ממשפט Sard)

תהא $f: M \to N$ חלקה ונניח ש: $\dim M < \dim N$

אז לתמונה $f(M)$ ב- N יש מידה <u>אפס</u>!

(הדיפרנציאל לא יכול להיות על)



<u>הרעיון של ההוכחה</u>

אם יש שיכון לתוך $\mathbb{R}^N$ אולי יש שיכון גם לתוך $\mathbb{R}^{N-1}$

כל עוד $N-1 > 2m$ $(n > 2m+1)$.

הרעיון לנסות להטיל מישור כך שההטלה עליו הוא גם שיכון.

"המימד" האוטומטי של היריעה הוא "נמוך". יש <u>כיוון</u> שהישרים בכיוון הזה חותכים את היריעה לכל היותר פעם אחת. ואז נטיל בכיוון הזה.

<u>הוכחה:</u> נשתמש במשפט שהוכחנו בשבוע שעבר:

$f: M \to \mathbb{R}^N$ אימרסיה חח"ע.

ונסמן: $P_v: \mathbb{R}^N \to H \cong \mathbb{R}^{N-1}$ את ההטלה האורתוגונלית ל-

$$H := P_v \mathbb{R}^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, v\rangle = 0\}$$

<u>טענה:</u>

לכל $v \in S^{N-1}$ (פרט לקבוצה בעלת מידה אפס)

ההרכבה $P_v \circ f: M \to H$ היא אימרסיה חח"ע עבור $N > 2m+1$

<u>הוכחת הטענה:</u>

נגדיר פ' חלקה

$$g: M \times M \setminus \Delta_M \to S^{N-1}$$

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

מהלמה (I) הקודמת $\longrightarrow$ $M \times M \setminus \Delta_M$ יריעה חלקה ממימד $2m$

מטענה III: כל עוד $2m < N-1$ התמונה של g בעלת מידה אפס ב- S^{N-1}.

$\Longleftarrow$ $P_v \circ f$ חח"ע (פרט לקבוצה V בעלת מידה 0).