5/12/2016

<u>הרצאה 11</u>:

<u>תזכורת</u>: (preimage thm) (RVT - Regular Value theorem)

$f: M^m \to N^n$ חלקה, q ערך רגולרי $(f^{-1}(q) \neq \emptyset)$

$f^{-1}(q)$ תת יריעה (משוכנת) של M ממימד $\dim M - \dim N$

<u>הרעיון</u>:

ורסיה של IFT. הפרט <u>Constant Rk theorem</u>.

<u>פרק ח</u>:

שימושים של RVT.

ראינו: כל יריעה (קומפקטית) ניתנת <u>לשיכון</u> בתוך $\mathbb{R}^N$, $N >> 1$

<u>משפט (משפט Whitney - גרסה חלשה)</u>:

כל יריעה קומפקטית (קשירה) ממימד m ניתנת לשיכון ב-$\mathbb{R}^{2m+1}$

<u>רעיון ההוכחה</u>:

<u>הוכחה</u>:

נקח: $f: M \to \mathbb{R}^N$ אימרסיה חח"ע. נסמן:

p_v - ההטלה האורתוגונלית לתת מרחב הניצב ל-v

$$p_v : \mathbb{R}^N \to H_v \cong \mathbb{R}^{N-1}$$

$$H_v = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

$$p_v(z) = z - \langle z, v \rangle v$$

<u>טענה</u>:

כל עוד $N > 2m+1$ אזי עבור $v \in S^{N-1}$ (פרט אולי לקב' ממידה אפס)

ההרכבה: $p_v \circ f : M \to H$ היא אימרסיה <u>חח"ע</u>.

<u>חח"ע</u>: (יריעה ממימד $2m$)

פונקצית עזר: $g: M \times M \setminus \Delta \to S^{N-1}$

$$g(x,y) := \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

ועכשיו $N > 2m+1$ + Sard.

התמונה היא בעלת מידה אפס ב-S^{N-1} $\Leftarrow$ $P_r f$ חח"ע

(חוץ פרט למקרה $r \in g(M\times M\setminus\Delta)$)

אימרסיה:

נגדיר פ' עזר:

$$h: TM \setminus \{M\times\{0\}\} \longrightarrow S^{N-1}$$

$$h(x,\tau) = \frac{df_x\tau}{\|df_x\tau\|}$$

$x\in M$ $\quad \tau\in T_xM\setminus\{0\}$.

כמו קודם: כל עוד (SARD) $2m+1<N$ נקבל אימרסיה.

(תרגיל: שפה אימרסיה, רמז: $d(P_r\cdot f) = P_r\, df$)

∎

שימושים של RVT

(*) שיכונים לתוך $\mathbb{R}^N$

(*) טרנסברסליות (אנליזה על יריעות II)

V מ"ו

$E,F < V$ תת מ"ו טרנסברסליים $E+F=V$.

בפרט אם כן $\dim V \le \dim E + \dim F$ אחרת אין טרנסברסליות

הגדרה:

M,N תת יריעות של Y הם טרנסברסליים ($M \pitchfork N$)

אם: $\quad T_xM + T_xN = T_xY \quad \forall x\in M\cap N$

תרגיל:

(*) $T_m f^{-1}(q) = \ker D_m f$

הגדרה:

$f: X \to Y$, Z תת יריעה של Y , $f \pitchfork Z$

אם לכל $a \in f^{-1}(Z)$ מתקיים:

$$D_a f(T_a X) + T_{f(a)} Z = T_{f(a)} Y$$

משפט:

M, N תת יריעות של Y , $M \pitchfork N \Longrightarrow M \cap N$ יריעה חלקה

(תת יריעה חלקה של Y, משוכנת-קוממדים? $\mathrm{codim}\, M + \mathrm{codim}\, N$)

הוכחה:

סקיצה של ההוכחה: זיהוי מקומי

נקח $p \in M \cap N$

$\exists U$ open nbg of p. $M \cap U = f^{-1}(0)$ $f: U \to \mathbb{R}^{\mathrm{codim}\, M}$ 0 reg value.

$N \cap U = g^{-1}(0)$ $g: U \to \mathbb{R}^{\mathrm{codim}\, N}$ 0 reg value.

נשאר:

$$(f,g): M \cap N \cap U \to \mathbb{R}^{\mathrm{cod}M + \mathrm{cod}N} \quad (*)$$

$$\ker D(f,g) = \ker D_p(f) \cap \ker D_p(g) \overset{*}{=} T_p M \cap T_p N$$

תנאי הטרנסברסליות מבטיח ש- על.

ולכן התמונה ההפוכה של $(0,0)$ היא החיתוך המבוקש, RVT.