23.1

אלגברה הומ׳ — הרצאה מספר 25

הגדרה 1 chain complex

$$\{(C_n, \partial_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\cdots \to C_{n+1} \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots$$

$$\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$$

$$C_* = \bigoplus C_n$$

סכום ישר

n-cycles $\quad Z_n = \ker\partial_n$

n-boundaries $\quad B_n = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$

$$H_n(C_*) = Z_n / B_n$$

הומולוגיה ה-n-ית

$$C_* = \{(C_n, \partial_n)\} \qquad \tilde{C}_* = \{(\tilde{C}_n, \tilde{\partial}_n)\}$$

chain map $\quad f: C_* \to \tilde{C}_*$

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & \tilde{C}_n \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\partial}_n} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & \tilde{C}_{n-1} \end{array}$$

סדרה מדויקת קצרה s.e.s

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

כל סדרה מדויקת מוגדרת

$0 \to 0_A$

$$0 \to A \xrightarrow{a} B$$

כי a חח״ע

$$B \xrightarrow{b} C \to 0$$

כי b על

באופן כללי = סדרה קצרה

אם

$$0 \to A_* \xrightarrow{a_*} B_* \xrightarrow{b_*} C_* \to 0$$

$$\forall n \quad (0 \to A_n \xrightarrow{a_n} B_n \xrightarrow{b_n} C_n \to 0)$$

מדויקת קצרה

משפט: בהינתן s.e.s של cochain complexes (zig-zag)

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{a^*} B^* \xrightarrow{b^*} C^* \longrightarrow 0$$

$\forall n\ \exists \left(\begin{smallmatrix}\text{connecting}\\ \text{homomorphism}\end{smallmatrix}\right)\ \delta: H^n(C^*) \to H^{n+1}(A^*)$

s.t. $\cdots \xrightarrow{\delta} H^n(A^*) \xrightarrow{a_n} H^n(B^*) \xrightarrow{b_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*)$ is exact

הוכחה:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A^n & \xrightarrow{a^n} & B^n & \xrightarrow{b^n} & C^n & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \to & A^{n+1} & \xrightarrow{a^{n+1}} & B^{n+1} & \xrightarrow{b^{n+1}} & C^{n+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A^{n+2} & \xrightarrow{a^{n+2}} & B^{n+2} & \xrightarrow{b^{n+2}} & C^{n+2} & \to & 0
\end{array}$$

הגדרה: "$\delta := (a^{n+1})^{-1} \circ d \circ (b^n)^{-1}$"

(δ בערך)

ניקח $\gamma_n \in C^n$

b^n על $\Leftarrow$ $\exists \beta_n \in B^n\ \ b^n(\beta_n) = \gamma_n$

(מסגירות γ ידוע ש- $d\gamma_n = 0$)

$d(d\gamma_n)$

קומוטטיביות: (דיאגרמה) $\Leftarrow$ $0 = d\, b^n \beta_n = b^{n+1} d\beta_n$

$\Leftarrow$ $d\beta_n \in Ker(b^{n+1}) = Im(a^{n+1})$

$\exists!\ \alpha_{n+1} \in A^{n+1}\ \ a^{n+1}\alpha_{n+1} = d\beta_n$

יחיד

גם סגור: קומוטטיביות $\Leftarrow$

$$a^{n+2} d\alpha_{n+1} = d\, a^{n+1}\alpha_{n+1} = d(d\beta_n) = 0$$

מכיוון ש- a^{n+2} חח"ע $\Leftarrow$ $d\alpha_{n+1} = 0$

סיכום: עשינו הגדרה מהמחלקות סגורות ב- C^n למחלקות סגורות ב- A^{n+1}

נראה שההגדרה "טובה"

II נניח שבחרנו גם $b^n \beta_n = \gamma_n$, $b^n \beta_n' = \gamma_n$

$$\left(b^n(\beta_n' - \beta_n) = 0\right)$$

exactness $\Rightarrow \exists \alpha_n \in A^n\ \ a^n\alpha_n = \beta_n' - \beta_n$

commutativity $\Rightarrow d(\beta_n' - \beta_n) = a^{n+1} d\alpha_n$

מהמעבר הקודם ⟶

$$a^{n+1}(x - x' - d\alpha_n) = 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \exists x & a^{n+1}x = d\beta_n \\ \exists x & a^{n+1}x' = d\beta_n' \end{cases}$$

ולכן $\Leftarrow$

חח"ע $\quad x - x' - d\alpha_n = 0$

(II) נראה שהרכבה משרה הפעלה מוגדרת ⟶ היטב על הקו-הומולוגיה

נניח $\gamma_n = d\gamma_{n-1} \in C^n$

על $b^{n-1} \Rightarrow \exists \beta_{n-1},\ b^{n-1}\beta_{n-1} = \gamma_{n-1}$

ומהקומוטטיביות $\Leftarrow$

$$b^n d\beta_{n-1} = d b^{n-1}\beta_{n-1} = d\gamma_{n-1} = \gamma_n$$

$$\Rightarrow d\beta_{n-1} = \beta_n \Rightarrow d\beta_n = 0$$

מחזור לפי מה שהוכח $\Leftarrow$ $\quad a^{n+1}\alpha_{n+1} = d\beta_n = 0$

$$\left(\delta([\gamma_n]) = [\alpha_{n+1}] \right) \quad \alpha_{n+1} = 0$$

<u>exact</u> $\quad \cdots \xrightarrow{\delta} H^n(A^*) \xrightarrow{a_n} H^n(B^*) \xrightarrow{b_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \to .$ (III)

נניח אז ש $\delta[c] \in H^n(A^*)$ ונפעיל את a^n

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \ker(a^n)} \Leftarrow \quad a^n\delta[c] = [d\beta_{n-1}] = [0]$$

נראה $\supseteq$

$a^n\alpha_n = d\beta_{n-1}$

ההמעבר ההפוכה של חץ

<u>הוכחה</u>

משמעות של

<u>"הסבר":</u> $\quad \delta = (a^n)^{-1} \circ d \circ (b^{n-1})^{-1}$

אזי

$$\delta^{-1} = \left((a^n)^{-1} \circ d \circ (b^{n-1})^{-1}\right)^{-1} = b^{n-1} \circ d^{-1} \circ a^n$$

Scanned by CamScanner