8/11/2016

הרצאה 4:

פרק 6: חלוקת היחידה

שימושים לחלוקת יחידה:

ג'ון לי [illegible]

1) לכל יריעה יש מטריקה רימנית

2) כל יריעה ניתן לשכן ב- $\mathbb{R}^n$ (עבור n מספיק גדול)

3) $X=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0\}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

א) f פולינום $\Leftarrow$ X סופית (משפט יסודי של האלגברה)

ב) f אנליטית $\Leftarrow$ X דיסקרטית

ג) $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ $\Leftarrow$ X יכולה להיות כל קבוצה סגורה. ← מסקנה מחלוקת היחידה.

רעיון:

X יריעה טופולוגית $\Leftarrow$ X פרה קומפקטי $\Leftarrow$ X רגולרי, X נורמלית. $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ הלמה של אוריסון $\Leftarrow$ חלוקת היחידה.

(גרסה טופולוגית
גרסה חלקה)

הגדרה:

כיסוי $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של מ"ט X נקרא סופי מקומי אם לכל נק' $x\in X$ יש סביבה W_x (קבוצה פתוחה) כך ש- $W_x\cap C_\alpha\neq\emptyset$ רק למספר סופי של אינדקסים $\alpha\in I$.

(אפשר להגדיר כאן: לאוסף של קבוצות שהן לאו דווקא כיסוי)

תרגיל (טופולוגיה)

$C=\{C_\alpha\}$ משפחה סופית מקומית של קבוצות סגורות. אזי $\bigcup C_\alpha$ סגור.

הגדרה:

כיסוי $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של מ"ט X נקרא עידון של כיסוי $\{D_\beta\}_{\beta\in B}$ אחר אם

$$\forall\alpha\ \exists\beta\ s.t\ C_\alpha\subseteq D_\beta$$

הגדרה:

מ"ט נקרא פרה-קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח קיים עידון סופי מקומי-

טענה:

כל יריעה טופולוגית X היא פרה קומפקטית.

הוכחה:

למה:

X ניתנת להצגה ע"י: $X=\bigcup^{\infty} K_i$ של קבוצות קומפקטיות K_i כך ש-

$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\dots$ וגם $K_i\subseteq Int(K_{i+1})$

הוכחת הלמה:

נזכר לי יריעה טופולוגית

X מ"ש $\Longleftarrow$ קיים כיסוי בן מנייה $\{W_i\}$ כך ש- $\overline{W_i}$ הוא קומפקט

נגדיר $K_1=\overline{W_1}$. נקח אינדקס המינימלי כך ש- $K_1\subseteq W_1\cup W_2\cup\dots\cup W_\ell$ קיים של כיסוי סופי כי K_1 קומפקטי

ונגדיר $K_2=\overline{W_1}\cup\overline{W_2}\dots\cup\overline{W_\ell}$ (איחוד סופי של קומפקטים ולכן קומפקט)

וממשיכים באינדוקציה.

הוכחת הטענה:

נקח K_i כמו בלמה, $K_i=\emptyset$ $0\geq i$.

נגדיר גם: $W_i=int(K_{i+1})\setminus K_{i-2}$ $\qquad$ $C_i=K_i\setminus int(K_{i-1})$

פתוחות $\qquad$ סגורה $\qquad$ תת הבוצה סגורה בקומפקט גם קומפקטי

נשים לב ש: $C_i=K_i\cap Int(K_{i-1})^c\subset Int(K_{i+1})\cap(K_{i-2})^c=$

$=W_i$

מהגדרה: $K_j\subset Int(K_{j+1})\subset\bigcup_{i=1}^{j}W_i$

$\Longleftarrow$ $\{W_i\}$ כיסוי פתוח של X.

נשים לב גם $K_j=\bigcup_{i=1}^{j}C_i$ ולכן גם $\bigcup^{\infty}C_i=X$.

נקח כיסוי פתוח כלשהו של X. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נראה שיש לו עידון סופי מקומי.

נגדיר: $U_{\alpha,i}=U_\alpha\cap W_i$

$\mathcal{U}_i=\{U_{\alpha,i}\}_{\alpha\in I}$ $\forall i\in\mathbb{N}.$ (נשים לב שזה כיסוי פתוח של W_i)

קיבלנו $\{U_{\alpha,i}\}_{i\in\mathbb{N},\alpha\in I}$ כיסוי פתוח שהוא עידון של הכיסוי הקודם.

C_i קומפקט $\Longrightarrow$ קיים תת כיסוי של C_i: $V_{i,1},\dots,V_{i,n_i}$

מתוך $\mathcal{U}_i$.

(זה העידון המבוקש) $\leftarrow$ $\mathcal{V}=\{V_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N},\,1\le j\le n_i}$

נראה שהוא סופי מקומי:

יהי $x_0\in X$ ונקח (i_0,j_0) כך ש- $x_0\in V_{i_0,j_0}$

נשים לב ש- $x_0\in W_{i_0}$.

נשים לב ש- $W_{i_0}\cap W_i=\emptyset$ לכל $i\ge i_0+3$

ולכן $V_{i,j}\cap V_{i_0,j_0}=\emptyset$ $\forall i\ge i_0+3$ ולכן יש רק מספר סופי

של הקבוצות בכיסוי שנחתכות עם V_{i_0,j_0}.

■

<u>טענה:</u> [illegible]

X יריעה טופולוגית $\Longrightarrow$ X רגולרית (אם יש נקודה וקבוצה סגורה אז קיימות קבוצות פתוחות זרות - אחת מכילה את הנקודה והשניה את הקבוצה הסגורה).

<u>הוכחה:</u>

תהי F סגורה $x\notin F$. לכל $y\in F$ ניתן למצוא קבוצות פתוחות U_y, V_y זרות, $x\in U_y$, $y\in V_y$ (כי X האוסדורף)

נתבונן בכיסוי הפתוח של X: $\{V_y\}_{y\in F}\cup(X\setminus F)$

פרה קומפקטיות $\Longrightarrow$ קיים עידון סופי מקומי $\{W_k\}$

נגדיר: $V=\bigcup\{W_k \mid W_k\cap F\neq\emptyset\}$ $\leftarrow$ הקבוצה פתוחה המכילה את F

$\{W_k\}$ סופי מקומי $\Longrightarrow$ עבור $x\in X$ קיימת סביבה U' שפוגשת רק מספר סופי $W_{k_1},\dots,W_{k_n}$

<u>אם</u> W_{k_i} פוגש את F (חתך אותו בהגדרה לא ריקה).

אזי הוא מוכל באיזשהו V_{y_i}. נגדיר:

$$U=U'\cap(U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_n})$$

פתוחה מכילה את x וכן: $U\cap V=\emptyset$

<u>משפט:</u> X ירשה טופולוגית ⟸ X רגולרי

⇓

<u>משפט:</u> X ירשה טופולוגית ⟸ X נורמלית.

<u>הוכחה:</u>

אם F, F' זרות. מהטענה הקודמת, $\forall x\in F$ קיימות סביבות פתוחות <u>זרות</u> $x\in U_x$, $F'\subseteq V_x$. כעת נתבונן באוסף:

$\{U_x\}_{x\in F}\cup(X\setminus F)$ כיסוי של X.

"ונחזור על הסימון הקודם" (תרגיל) המשך:

נעבור לכיסוי סופי מקומי $\{W_i\}$

<u>נגדיר:</u> $$U=\bigcup\{W_k \mid W_k\cap F\neq\emptyset\}$$

זוהי הקבוצה פתוחה המכילה את F.

לכל $y\in F'$ קיימת סביבה פתוחה H_y החותכת רק מס׳ סופי של $W_{k_1(y)},\dots,W_{k_n(y)}$. כמו קודם, אם $W_{k_i(y)}$ פוגש את F אזי היא חייבת להיות מוכלת ב- $U_{x_i(y)}$

נגדיר: $$G_y = H_y\cap\{V_{x_1(y)}\cap\dots\cap V_{x_n(y)}\}$$

ונגדיר: $$V=\bigcup_{y\in F'} G_y$$

וזאת הקבוצה הפתוחה המבוקשת. ■

<u>משפט:</u>

אם X נורמלי אזי לכל כיסוי פתוח $X=U_1\cup\dots\cup U_n$ יש <u>חלוקת יחידה</u> <u>ביחס לכיסוי</u>

<u>הערה:</u>

אנחנו מראים חלוקת יחידה עבור M קומפקטית (כאן עשינו את כל העבודה הקשה בשביל לעבור למקרה הכללי יותר כדף תרגיל III)

הלמה של אוריסון: (רציפה/חלקה)

X נורמלי, A,B סגורות וזרות אז יש פונקציה רציפה / חלקה

$f: X\to[0,1]$ כך ש- $f|_A = 1$ ו- $\mathrm{supp}(f)\subseteq X\setminus B$

$(f|_B \equiv 0)$

הוכחת הטענה:

שלב I: נמצא כיסוי פתוח של X, $X=V_1\cup V_2\dots\cup V_m$, כך ש-

$\overline{V_k}\subseteq U_k$

הסבר:

$A = X\setminus(U_2\cup\dots\cup U_n)$ סגורה מוכלת ב- U_1

X נורמלי $\Leftarrow$ קיימת קבוצה פתוחה V_1 כך ש-

$A\subseteq V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq U_1$

בנוסף: $V_1\cup U_2\cup\dots\cup U_n$ עדיין מהווה כיסוי של X

נניח שהגדרנו $V_1,\dots,V_{k-1}$ נקח:

$B = X\setminus(V_1\cup\dots\cup V_{k-1}\cup U_{k+1}\cup\dots\cup U_n)$ סגורה

ומוכלת ב- U_k נעשה את אותו הדבר.

נחזור על אותו השיקול הפעם עבור הכיסוי $V_1\cup\dots\cup V_n$

נקבל עוד כיסוי (פתוח סופי) $\{W_k\}_{k=1}^{n}$ כך ש-

$\overline{W_k}\subseteq V_k\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k$

נשתמש כעת בלמה של אוריסון עבור $\overline{W_k}$ ו- $X\setminus V_k$

ונקבל $\phi_k(x)=\begin{cases}1 & x\in\overline{W_k}\\ 0 & x\in X\setminus V_k\end{cases}$ חלקה: $\phi_k: X\to[0,1]$

$\Longleftarrow$ $\mathrm{supp}(\phi_k)\subseteq\overline{V_k}\subseteq U_k$

נתבונן באוסף $\phi_1,\dots,\phi_n$. נשים לב שעבור $x\in X$ לפחות אחת מהן שונה מ- 0.

נגדיר:

$$\psi_k=\frac{\phi_k}{\phi_1+\dots+\phi_n}$$

קיבלנו משפחה של פונקציות חלקות ψ_k המקיימות $\mathrm{supp}\,\psi_k\subseteq U_k$

המקיימות $\sum\psi_k = 1$ לזה קוראים חלוקת יחידה כפופה לכיסוי U_n ...

מסקנה:

הוכחנו קיום של חלוקת יחידה עבור M קומפקטית (מודולו הלמה של אוריסון גרסה חלקה)

הערה:

במקרה הכללי (יריעה לאו דווקא קומפקטית) מדובר באוסף כלשהו של פונקציות $\sum_{\alpha\in I}\psi_\alpha = 1$ אבל לכל $x\in M$ יש רק מספר סופי של $\alpha\in I$ עבורן $\psi_\alpha(x)\neq 0$.

הלמה של אוריסון (גרסה חלקה)

טענה:

$K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה (סביבה) של K.

אזי קיימת העתקה חלקה C^∞ $f|_K=1$ וכן $\text{supp}(f)\subseteq U$ $=\{x \mid f(x)\neq 0\}$

סקיצה:

$h:\mathbb{R}\to[0,1]$; $h(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2} & t\neq 0 \\ 0 & t=0 \end{cases}$ (היא C^∞ אבל לא אנליטית)

$h_+(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2} & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$ $h_-(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2} & t<0 \\ 0 & t\ge 0 \end{cases}$

נגדיר: $k(t)=h_-(t-b)\cdot h_+(t+a)$ $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ (חלקה כמכפלה של 2 חלקות)