21/5/13

קומבינטוריקה בסיסית - הרצאה IX

שימושים של הכלה-הדחה

משפט Cayley: ל-K_n יש n^{n-2} עצים פורשים.

משפט Kirchoff: נניח G גרף מכוון. נסמן ב-$T_E(v)$ את מס' העצים הפורשים של G שמכוונים כלפי מעלה ל-v:

נגדיר את המטריצה $L(E)$ המקיימת

$$L_{ij} = \begin{cases} \underbrace{d_{out}(i)}_{\text{דרגת יציאה}} & i=j \\ 0 & i\neq j \quad (i,j)\notin E(G) \\ -1 & i\neq j \quad (i,j)\in E(G) \end{cases}$$

אז $T_E(v_i)=Det(L_{ii})$
המינור בלי השורה והטור ה-i.

מסקנה: kirchoff $\Rightarrow$ cayley

במקרה של K_n - $L=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ נחשב את $\det(L_{11})$

מספיק מטריצה:

$$\left.\begin{vmatrix} n-1 & & & -1 \\ & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ -1 & \cdots & & n-1 \end{vmatrix}\right\}{\scriptstyle n-1} \xrightarrow[R_i-R_1]{} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -n & 0 & & n \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & n \end{vmatrix}$$

∎

הוכחת Kirchoff

נגדיר F_G כל האופציות בהן נבחר לכל אחד ~~...~~ מהקודקודים $u_2,\dots,u_n$ לבחור את אחת הקשתות היוצאות ממנו $|F_G|=\prod_{i=2}^{n} d_i$

טענת עזר: בחירה כזאת מגדירה עץ $\Leftrightarrow$ אינה מכילה מעגל

הוכחת טענת עזר: אם אין מעגל אז לכל קודקוד u ניתן להמשיך לאורך הקשתות שנבחרו וברור שבסוף נגיע ל-v.

אם יש מעגל אז ברור שהקשתות אינן יוצרות גרף קשיר.

לכן $T_E(v_n)$ = מספר הבחירות ב-F_G שאינן מכילות מעגל.

נגדיר עבור מעגל C את A_C להיות אוסף הבחירות שמכילות את C. לכן ~~$T_G(v)=|F_G|-|\bigcup A_C|$~~

$$T_G(v)=|F_G|-\left|\bigcup_C A_C\right| = \prod_{i=2}^{n} d_i - \sum|A_C| + \sum|A_C\cap A_{C'}| - \dots \quad (*)$$

בה"נ $c_1,\dots,c_k$ נרצה לחשב את $|A_{c_1}\cap\dots\cap A_{c_k}|$. נגדיר את

$\sigma=\sigma(c_1,\dots,c_k)$ להיות הפרמוטציה שמכילה את k המעגלים הנ"ל

! אז $n-1$ פלוגות על שאר הגרף $|A_{c_1}\cap\dots\cap A_{c_k}| = |\prod_{i=2}^{n} L(i,\sigma(i))|$

הסבר: אם i לא מופיע באף אחד מהמעגלים נשים $\delta_{i,i}$ ונקבל

את דרגתו אחרי את הקשתות שנמצאות במעגל נקבל 0 ונכפל.

$$(*) = \sum_{\sigma=\sigma(c_1,\dots,c_k)} (-1)^k \left|\prod_{i=2}^{n} L(i,\sigma(i))\right| = (**)$$

כמה (-1) יש ב- $\prod_{i=2}^{n} L(i,\sigma(i))$: $\sum_{i=1}^{k} |c_i|$

$$(**) = \sum_{\sigma=\sigma(c_1,\dots,c_k)} (-1)^{k+\sum_i |c_i|} \prod_{i=2}^{n} L(i,\sigma(i)) = (*)$$

מה הסימן של הפרמוטציה $\sigma(c_1,\dots,c_k)$?

מספר המעגלים ב-σ הוא $k+(n-1-\sum_i |c_i|)$ לכן הסימן הוא

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{k+\sum_i |c_i|}$$

$$(*) = \sum_{\sigma=\sigma(c_1,\dots,c_k)} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=2}^{n} L(i,\sigma(i)) \underset{\text{הגדרה}}{=} \mathrm{Det}(L_{1,1})$$

כנדרש.

הלמה של Gessel-Viennet-Lindstorm

יהי G גרף מכוון חסר מעגלים וממושקל.

מסלול יסומן ב-P ואוסף מסלולים יסומן ב-$\mathcal{P}$.

משקל של מסלול: $w(P)$ = מכפלת משקלי הקשתות של P (אם $P=\emptyset$ אז $w(\emptyset)=1$)

$\prod_{P\in\mathcal{P}} w(P)$ – מכפלת משקלי הקשתות שב-$\mathcal{P}$.

יהיו ש-A,B הן 2 קבוצות קודקודים ב-G בגודל k כל אחת

(אלו קודקודים זרים). נגיד שאוסף מסלולים $\mathcal{P}=\{P_1,\dots,P_k\}$ היא

A-B מעבר אם יש פרמוטציה $\sigma:[k]\to[k]$ כך שלכל $1\le i\le k$

המסלול P_i מחבר את a_i עד $b_{\sigma(i)}$.

נגיד ש-$\mathcal{P}$ כנ"ל היא נמדה אם היא A-B מעבר והמסלולים

זרים בקודקודים.

נגדיר $\mathrm{sign}(\mathcal{P})$ עבור $\mathcal{P}$ A-B מעבר להיות $\mathrm{sign}(\sigma)$

כאשר σ היא הפרמוטציה המושרית על ידי $\mathcal{P}$.

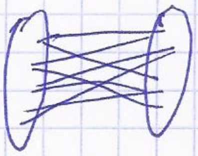
נסמן $m_{ij}=\sum_{P} w(P)$ כאשר הסכום רץ על כל המסלולים מ-a_i ל-b_j. אזי אם $M\in M_{k\times k}$ המטריצה המקיימת $M_{ij}=m_{ij}$ אז

$$\boxed{\sum_{P\ \text{נחמדים}} sign(P)\,w(P)=Det(M)}$$

<u>דוגמא:</u>

המקרה הפרטי כש-G גרף דו"צ שבו הכיוון משמאל לימין.

במקרה זה $M_{ij}=w_{ij}$ כלומר משקל הקשת (i,j) לפי הלמה



$$\sum_{P\ \text{נחמדים}} sign(P)\,w(P)=Det\,M$$

<u>הוכחת הלמה:</u>

נתבונן ב- $Det(M)$:

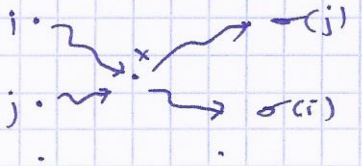
$$Det(M)=\sum_{\sigma} sign(\sigma) M_{1,\sigma(1)}\cdots M_{k,\sigma(k)}=\sum_{P\ \text{A-B מחברים}} sign(P)\,w(P)=$$

$$=\sum_{\substack{P\ \text{A-B מחברים}\\ \text{נחמדים}}} sign(P)\,w(P)+\sum_{\substack{P\ \text{A-B מחברים}\\ \text{ולא זרי קודקודים}}} sign(P)\,w(P)$$

נראה ש $\sum_{\substack{P\ \text{A-B מחברים}\\ \text{ולא זרי קודקודים}}} sign(P)\,w(P)=0$

נראה כי קיים זיווג f על האוספים ה- A-B מחברים שאינם נחמדים

כך ש- $sign(P)=-sign(f(P))$! $w(P)=w(f(P))$



יהי i האינדקס המינימלי כך שהמסלול $i\rightsquigarrow\sigma(i)$ חותך מסלול אחר.

יהי x הקודקוד הראשון על המסלול הנ"ל כך שמשותף למסלול נוסף. יהי j האינדקס המינימלי כך שהמסלול $j\rightsquigarrow\sigma(j)$ עוברת ב-x.

נגדיר $f(P)$ להיות אוסף המסלולים בו שינינו רק:

$i\rightsquigarrow x\rightsquigarrow\sigma(j)$, $j\rightsquigarrow x\rightsquigarrow\sigma(i)$.

ברור ש- $sign(f(P))=-sign(P)$ כי הוספנו חילוף

! - $w(f(P))=w(P)$ כי אותן קשתות בדיוק.

נשים לב ש- $f(f(P))=P$ ולכן זה זיווג.

ונשים לב היה עוקב את היין בודרים אחלה i, לא את j

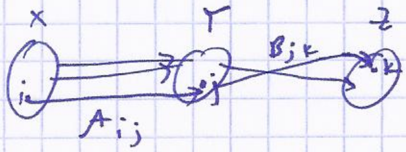
ולכוון את x:

עתה לאחר התהליך המינימלי שאני i יוצא ב- יהיה j

ולכן נקבל $P=f(f(P))$

__טענה:__ $Det(A)=Det(A^t)$ יוצרים מלהסתכל על הגרף ההפוך

והוכחה קשורה.



__טענה:__ $Det(AB)=Det(A)Det(B)$.

נשכר בגרף רמיזה מזה

__ממשמש:__

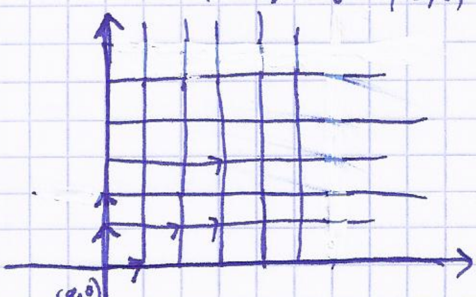
$$Det(A)Det(B)=\sum_{\substack{P \text{ עמודים} \\ \text{מ-}X\text{ ל-}Y}} Sign(P)\,\omega(P)\cdot\sum_{\substack{P \text{ עמודים} \\ \text{מ-}X\text{ ל-}Z}} Sign(P'')\,\omega(P'')=Det(AB)$$

כי $(AB)_{ij}$ שווה ל- m_{ij}

__תזכורת:__

כמה מסלולים יש בשריג $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ מ-$(0,0)$ ל-(a,b):

$$\binom{a+b}{a}$$



נניח ש $a_1<a_2<\dots<a_n$! $b_1<b_2<\dots<b_n$

ונגדיר מטריצה M כך ש $\forall i\ a_i,b_i\in\mathbb{N}$:

$M_{ij}=\binom{a_i}{b_j}$. ורוצים להגיד משהו על $\det(M)$.

__טענה:__

1) $Det(M)\geq 0$

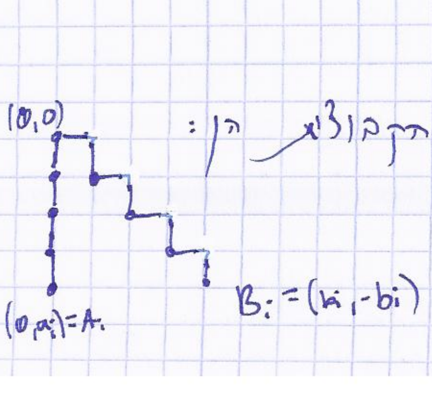
2) $Det(M)=0 \iff$ יש i עבורו $a_i<b_i$

__הוכחה:__

נתבונן בגרף הבא: השריג כולו כאשר הקבוצות הן:

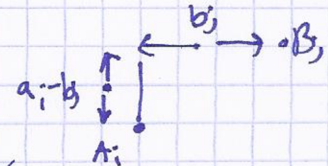
$A=\{(0,a_i)\}$

$B=\{(b_i,-b_i)\}$



ונשלים כי הקשר 1.

במקרה זה m_{ij} הוא פשוט כמות המסלולים בין A_i ל- B_j.
(כי משקל כל מסלול הוא 1).



מספר זה הוא בדיוק $\binom{a_i}{b_j}$

לכן M היא המטריצה הנדונה מהלמה של GVL ולכן

$$\det(M) = \sum_{P \text{ נחמדה}} w(P)\,\mathrm{sgn}(P)$$

נשים לב בגלל זה P נחמדה תמיד לחבר את a_i ל- b_i אחרת היו נחתכים.

כלומר $\mathrm{Det}(M)$ היא מספר ~~...~~ האוספים הנחמדים (אין שינוי של סימן)

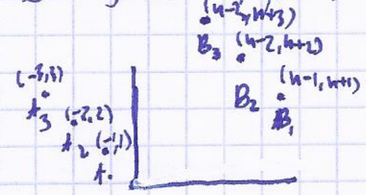
לכן ≥ 0. כמובן יש לפחות מסלול אחד נחמד $\Leftrightarrow \forall i\; a_i \ge b_i$ (ללכת בבחירה אופקית עד שנהיה מתחת ל- B_i ואז נעלה למעלה)

וזה שקול לעובדה ש $\det(M) \neq 0$.

הולך פה ← מספר האפשרויות לרצף משושה על ידי מעוינים = plane partition

<u>הגדרה:</u> $p(n)$ = מספר ה- plane-partitions בגין הקוביה $n\times n\times n$ = מספר המטריצות $n\times n$ עם ערכים מ- $[n]$ שיורדים מונוטונית בכל שורה וטור.

הראנו האם ממש׳ (בעזרת מטריצה יש יקיר) = מספר המסלולים מ-$(0,0)$ ל-(n,n) $=\binom{2n}{n}$



<u>טענה:</u>

$$p(n) = \mathrm{Det}\left(m_{ij} = \binom{2n}{n+i-j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

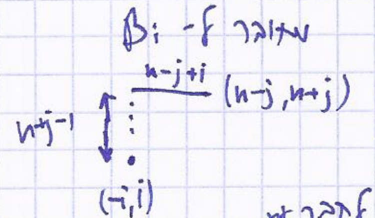
נסתכל על השריג והקבוצות יהיו:

$A=\{(-i,i)\}$

$B=\{(n-i,n+i)\}$

נשים לב שאם P הוא אוסף מסלולים נחמד אז A_i מחובר ל- B_i

נחשב כמה מסלולים מ- A_i ל- B_j: $\binom{2n}{n+i-j}$



לכן מהלמה נקבל ש- $\mathrm{Det}(M)$ = מס׳ האפשרויות לחבר את A_1 ל- B_1, A_2 ל- B_2, ..., A_n ל- B_n כך ש-n המסלולים יהיו זרים. נשאר להראות שכל אוסף מסלולים כזה מייצג plane-partition ולהיפך. נעזוב בינתיים ונסכים. :)