סכימה לפי אבל

הגדרה - נאמר שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס לפי אבל אם קיים הגבול

$$\lim_{x\to 1^-} \sum a_n x^n = L$$

ומסמנים $L=(A)\sum a_n$

* הערה - טור מתכנס $\longrightarrow$ מתכנס לפי אבל. לא עובד הפוך, למשל בטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

תרגיל - 2015 מועד א', סמסטר ב'

תהי $\{a_n\}$ סדרה אי-שלילית. נניח שקיים וסופי הגבול:

$$L=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

הוכיחו שהטור $\sum a_n$ מתכנס ל- L.

פיתרון:
סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ מונוטונית עולה (כי $a_n \geq 0$)
ולכן מספיק להוכיח שהיא חסומה.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$$

סכימה לפי צ'זארו

הגדרה - תהי $\{c_n\}$ סדרה.
נאמר שיש לה גבול לפי צ'זארו אם קיים הגבול

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} c_n$$

תהי $\sum a_n$ טור. נאמר שהוא מתכנס לפי צ'זארו אם קיים הגבול

$$(c)\sum c_n = \lim_{N\to\infty}\frac{s_0+s_1+\dots+s_N}{N+1} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{K=0}^{n} a_K$$

* הערה - נזכור שאם $c_n \to L$ אזי $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} c_n \to L$
כלומר התכנסות רגילה גוררת התכנסות לפי צ'זארו,
לא בכיוון ההפוך. דוגמה: $\sum(-1)^n$

משפט - יהי $\sum a_n x^n$ טור סכים לפי צ'זארו, אזי הוא סכים לפי אבל
וכן $(c)\sum a_n = (A)\sum a_n$

משפט - נניח שהסכום $\sum a_n$ סכים לפי אבל, כלומר קיים הגבול $\lim_{x\to 1^-}\sum a_n x^n = S$
נניח בנוסף $a_n = o(\frac{1}{n})$ ($n\cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
אזי $\sum a_n = S$

תרגיל - אם טור $\sum a_n$ מתכנס לפי צ'זארו אזי $\frac{a_n}{n}\longrightarrow 0$

פיתרון - נסמן $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ו- $b_n = \frac{S_0+S_1+\dots+S_N}{N}$

קיים כי הטור מתכנס לפי צ'זארו - $L=\lim_{n\to\infty} b_n$

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} S_k - \sum_{k=0}^{n} S_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k\right) =$$

$$= (n+1)b_{n+1} - nb_n - nb_n + (n-1)b_{n-1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} L-2L+L=0$$