מספרים מרוכבים

שדה המרוכבים - $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R},\ i=\sqrt{-1}\}$

זו הרחבה של השדה $\mathbb{R}$

אז אפשר לחשוב על $\mathbb{R}$ כתת שדה של $\mathbb{C}$ - $\mathbb{R}=\{a+i\cdot 0\}\subset\mathbb{C}$

סימונים: חלק ממשי - $Re(a+ib)=a$

חלק מדומה - $Im(a+ib)=b$

נורמה/ערך מוחלט - $|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

הצמוד - $\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$

תכונות:
- $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

סדרות

$\{z_n\}\subset\mathbb{C}$, $z_n=a_n+ib_n$

אם $a_n\to a$ ו- $b_n\to b$ נאמר ש- $z=a+ib$ $z_n\longrightarrow$

מצד שני, אם $z_n\longrightarrow z$ $(\forall(\varepsilon>0).\exists(N\in\mathbb{N}).\forall(n>N).[|z_n-z|<\varepsilon])$

בפרט מתקיים $Im(z_n)$, $Re(z_n)$ סדרות המתכנסות ל- $Im(z)$, $Re(z)$ בהתאמה.

טורי חזקות

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$. התכנסות הטור שקולה להתכנסות של $S_N(z)=\sum_{n=0}^{N}c_n z^n$
ומתרחשת בדיסק סביב 0 (z_0).

משפט - יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ ($c_n\in\mathbb{C}$) ונניח שהטור מתכנס בנק' z_1.
נסמן $R=|z_1|$. אזי הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש ב- $D_r=\{z \mid |z|\le r\}$ $\forall r<R$.

כלומר קיימת פונקציה $f:D_r\to\mathbb{C}$ כך ש:

$$\forall(\varepsilon>0).\exists(N\in\mathbb{N}).\forall(n>N).[\sup_{z\in D_r}|S_n(z)-f(z)|<\varepsilon]$$

נוסחת קושי הדמר - יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$.
נגדיר -

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}\quad\left(\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{0}=\infty\right)$$

אזי:
1) הטור מתכנס בהחלט ב- $|z|<R$
2) לכל $r<R$ הטור מתכנס במ"ש ב- D_r
3) הטור לא מתכנס ב- $R<|z|$

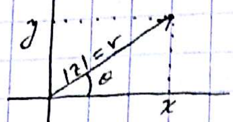
דוגמה - $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ - הטור מתכנס במ"ש בכל דיסק סגור ומתכנס ב- $\mathbb{C}$

מתקיים $e^{z+w}=e^z e^w$

נשים לב - $e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\cos x+i\sin x$

וקיבלנו את נוסחאת אוילר - $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

הצגה פולרית של מספר מרוכב



$$z = x + iy = r e^{i\theta}$$

$$r = |z|$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

לשים לב, זה עובד רק כש- $x>0$, אחרת צריך להוסיף כמה π כדי שיסתדר.

תכונות:

- $(r_1 \cdot e^{i\theta_1})(r_2 \cdot e^{i\theta_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$

תרגיל

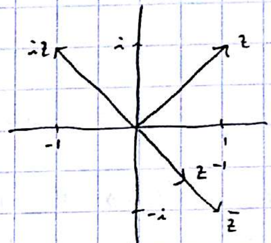
$z = 1+i$. חשבו וציירו את $\bar z, z^2, z^{-1}, iz$

$\bar z = 1 - i$, $iz = i + i^2 = i - 1$

$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $iz = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^2 = 2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

$z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$



תרגיל

z על מעגל היחידה $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{z} = \bar z$

הוכחה - $\leftarrow$ $|z| = 1$ $\Leftarrow$ $z = e^{i\theta}$

$\bar z = e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$

$\rightarrow$

$\bar z = r e^{-i\theta}$, $z = r e^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$ $\rightarrow$ $r = 1$

תרגיל

הוכיחו -

$$\overline{e^z} = e^{\bar z}$$

$$\overline{e^{x+iy}} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = \overline{e^x} \cdot \overline{e^{iy}} = e^x \cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar z}$$

תרגיל

פיתרו - $e^z = 1$

$|e^z| = 1$ וגם $|e^z| = e^x$ $\rightarrow$ $x = 0$

$e^{iy} = 1 = \cos y + i \sin y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2\pi i K \quad (K \in \mathbb{Z})$

נשים לב -

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

<u>תרגיל</u>

נוכיח זהויות של $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\|$$

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)$$