חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

13 בדצמבר 2016

ניזכר בהערה מהשיעור שעבר:

הערה 0.1 אם $Z\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית של Z (כלומר Z מכילה סביבה כלשהי של הנקודה), אזי Z אינה ממידה אפס או מנפח אפס.

זה ברור, כי סביבה של נקודה מכילה תיבה, ואז היינו מקבלים תיבה מנפח אפס - וזה לא קיים. בשביל זה צריך תרגיל שראינו בשיעור שעבר - תיבה לעולם לא מנפח אפס. שלבים להוכחת התרגיל:

1. ניקח כיסוי של תיבה P על ידי תיבות A_{i}. נגדיר כיסוי חדש $\tilde{A}_{i}=A_{i}\cap P$, ואז

$$\sum\text{vol}\left(\tilde{A}_{i}\right)\leq\sum\text{vol}\left(A_{i}\right)$$

2. נגיע לחלוקה של P לתיבות $\tilde{\tilde{A}}_{i}$, שגם סכום הנפחים שלהן קטן - בסתירה, כי סכום נפחיהן הוא נפח P (חלוקה).

תרגיל תהי $Z\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת מידה 0. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי של Z על ידי קוביות C_{i} כך שמתקיים

$$\sum\text{vol}C_{i}<\varepsilon$$

כעת נעבור לנושא אחר.

טענה 0.2 תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ כאשר $n\leq m$, ונניח כי f ליפשיץ, כלומר קיים קבוע L עבורו

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq L\left|x-y\right|$$

אזי אם Z קבוצה עם נפח/מידה אפס אז $f\left(Z\right)$ גם כן.

הוכחה: תהי Z בעלת מידה אפס, ויהי $\varepsilon > 0$. ניקח A_i כיסוי של Z על ידי קוביות עם צלע a_i, כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n < \varepsilon$$

כעת, נסמן בתור x את מרכז אחת הקוביות, וניקח נקודה y באותה קוביה. אזי

$$|f(x) - f(y)| \le L |x - y| \le L\sqrt{n} \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \le L\sqrt{n} \frac{a}{2}$$

ואז מתקיים גם

$$\left| f(x)^k - f(y)^k \right| \le |f(x) - f(y)| \le L\sqrt{n} \frac{a}{2}$$

לכן אם A קוביה עם צלע a אזי $f(A)$ נכללת בקוביה עם צלע $L\sqrt{n}a$. זה נכון בפרט לכל A_i, ולכן יש כיסוי של $f(Z)$ על ידי קוביות בעלות צלעות $L\sqrt{n}a_i$. נחשב נפח כולל:

$$\sum_i \left(L\sqrt{n}a_i\right)^m = \left(L\sqrt{n}\right)^m \sum_i a_i^m \le \left(L\sqrt{n}\right)^m \sum_i a_i^n < \left(L\sqrt{n}\right)^m \varepsilon$$

השתמשנו כאן בזה שמתקיים $m \ge n$. אותה הוכחה עובדת גם לנפח אפס. ■

דוגמא להכרחיות התנאי $n \le m$. למשל ניקח קטע במישור $\mathbb{R}^2$, שהוא מנפח אפס. ההטלה אל $\mathbb{R}$ היא העתקה ליפשיץ, אבל תמונת הקטע אינה ממידה אפס.

מסקנה 0.3 ניקח בטענה $f(x) = Ax + b$. כמובן

$$|f(x) - f(y)| = |Ax - Ay| = |A(x - y)| \le ||A|| \, |x - y|$$

ולכן הפעלת העתקה לינארית על כל קבוצה בעלת נפח/מידה אפס משאירה את הקבוצה באותו מצב, כל עוד המימד עולה. זה נכון אפילו אם f גזירה ברציפות, עם $||Df|| < L$.

הגדרה 0.4 תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת סינגולרית אם $\mathrm{rk}(D_x f) < m$, ונקראת רגולרית אם $\mathrm{rk}(D_x f) = m$.

הערה 0.5 אם $n < m$ אז כל נקודה היא סינגולרית. אם $n = m$, סינגולריות שקולה להתאפסות $\det D_x f$.

משפט 0.6 (סארד) תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כאשר f היא לפחות C_1. נסמן בתור X את אוסף כל הנקודות הסינגולריות, ונסמן $Z = f(X)$ - קבוצת הערכים הסינגולריים של f. אזי Z ממידה 0.

את המשפט הזה לא נוכיח. ניזכר במשפט לבג - פונקציה אינטגרבילית רימאן אם ורק אם מידת קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא 0.

הגדרה 0.7 נסמן B_f את קבוצת נקודות האי רציפות של f.

הגדרה 0.8 נסמן $g \overset{a.e.}{=} f$ אם קבוצת הנקודות שבהן $f \neq g$ היא ממידה 0.

תכונות

1. אם f, g אינטגרביליות אזי $B_{f \cdot g} \subseteq B_f \cup B_g$ ולכן גם $B_{f \cdot g}$ ממידה אפס, כלומר $f \cdot g$ אינטגרבילית.

2. אם f, g אינטגרביליות על Q, $g \overset{a.e.}{=} f$, אזי

$$\int_Q f = \int_Q g$$

יש לשים לב שחובה ששתיהן אכן יהיו אינטגרביליות - דוגמה נגדית קלאסית היא פונקציית דיריכלה.

3. נתון $\varphi \geq 0$ אינטגרבילית על Q. אזי אם $\int_Q \varphi = 0$ אזי $0 \overset{a.e.}{=} \varphi$.

4. אם f אינטגרבילית על Q, וכן g חסומה על Q כך שמתקיים

$$\mathrm{vol}\left(\{x \in Q \mid f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

אזי גם g אינטגרבילית וכם

$$\int_Q f = \int_Q f$$

הוכחה:

1. ברור.

2. נגדיר $\varphi = f - g$, וידוע כי φ אינטגרבילית וכן $0 \overset{a.e.}{=} \varphi$. ניקח P חלוקה של התיבה Q. נטען כי בכל תיבה $P_j \in P$ קיימת נקודה x_j שבה $\varphi(x_j) = 0$. אחרת, φ הייתה שונה מאפס בכל התיבה P_j, בסתירה לכך שקבוצת הנקודות בהן זה מתקיים ממידה 0. אזי נתבונן בסכומי דרבו:

$$s(\varphi, P) \leq 0 \leq S(\varphi, P)$$
$$I_* \leq 0 \leq I^*$$

אבל φ אינטגרבילית, כלומר $I^* = I_* = 0$. מכאן נקבל את הנדרש.

3. נגדיר קבוצה

$$Z = \{x \mid \varphi(x) > 0\}$$

כעת נראה כי $Z \subseteq B_\varphi$, ואז ממשפט לבג נקבל את הנדרש (B_φ ממידה 0). תהי x נקודה עבורה $\varphi(x) > 0$, ונניח בשלילה כי היא אינה נקודת אי רציפות. אזי קיימת תיבה A הכוללת את x עבורה $\varphi(p) \geq \frac{\varphi(x)}{2}$ לכל $p \in A$. אזי גם האינפימום בתיבה זו הוא לפחות $\frac{\varphi(x)}{2}$, ואז לכל חלוקה שניקח נוכל לעדן אותה כך שכל התיבות בה חלקיות לתיבה A או זרות לה, ונוכל לראות כי סכום דרבו התחתון שלה הוא לפחות קבוע כפול נפח A, ולכן גם האינטגרל התחתון של f כזה - בסתירה לכך שהאינטגרל מתאפס.

4. נגדיר $\varphi = f - g$. φ חסומה, ונסמן את החסם שלה M. צריך להוכיח כי φ אינטגרבילית וגם

$$\int_Q \varphi = 0$$

לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $A_1, \ldots, A_N$ המכסות את Z, וסכום נפחיהן לכל היותר ε. ניקח P חלוקה של Q ובלי הגבלת הכלליות נוכל להניח שכל A_i הוא איחוד של תיבות מסויימות של החלוקה P (אחרת נעדן). כעת לכל i קיימים מתקיים

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{N_i} P_{i,n_i}$$

כעת נכתוב

$$S(\varphi, P) = \sum M_{P_j} \mathrm{vol} P_j = \sum_{P_j \subseteq \bigcup A_i} M_{P_j} \mathrm{vol} P_j \leq M \sum_{P_j \subseteq \bigcup A_i} \mathrm{vol} P_i < M\varepsilon$$

באותו אופן נראה כי גם $s(\varphi, P) > -M\varepsilon$, ולכן φ אינטגרבילית עם אינטגרל 0.

$\blacksquare$

1 מידת ז'ורדן

את מחלקת הקבוצות בעלות מידת ז'ורדן, או קבוצות עם נפח במרחב $\mathbb{R}^n$, נסמן $\mathcal{J}$.

הגדרה 1.1 עבור קבוצה חסומה E, נסמן

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הגדרה 1.2 קבוצה E חסומה היא בעלת מידת ז'ורדן, כלומר $E \in \mathcal{J}$, אם בהינתן תיבה מסויימת Q עבורה $E \subseteq Q$ הפונקציה χ_E אינטגרבילית על Q. מסמנים

$$\int\limits_Q \chi_E = \mathrm{vol}\left(E\right)$$

הערה 1.3 זה מוגדר היטב, כי לכל תיבה שניקח, הפונקציה χ_E תקבל את הערך 1 רק בתוך E, ולכן רק נקודות בתוך E "יתרמו" לסכומי רימן.

טענה 1.4 תהי E קבוצה חסומה בתוך $\mathbb{R}^n$. אזי $E \in \mathcal{J}$ אם ורק אם השפה ∂E מנפח אפס.

הערה 1.5 השפה ∂E קבוצה קומפקטית, ולכן מספיק להראות כי היא ממידה אפס.

את הטענה הזו נראה בשיעור הבא.