חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

28 בדצמבר 2016

1 מדידות ז'ורדן (נפח)

הגדרה 1.1 תהי $E \subseteq Q$. E נקראת מדידה ז'ורדן (בעלת נפח) ומסמנים $E \in \mathcal{J}$, אם האינדיקטור $\chi_E(x)$ אינטגרבילי רימן.

משפט 1.2 $E \in \mathcal{J}$ אם ורק אם $\text{meas}(\partial E) = \text{Vol}(\partial E) = 0$.

הוכחה: (מיידית ממשפט לבג) מה הן נקודות אי הרציפות של $\chi_E(x)$? לכל נקודה פנימית של E, האינדיקטור רציף, וכך גם לגבי החיצון. קל לראות כי נקודות אי הרציפות הן בדיוק נקודות השפה ∂E. אז $E \in \mathcal{J}$ אם ורק אם מידת נקודות אי הרציפות היא 0, כלומר $\text{meas}(\partial E) = 0$. נסמן B_f את קבוצת נקודות אי הרציפות של f. במקרה זה,

$$B_{\chi_E} = \partial E$$

∂E סגורה וחסומה (כי $E \subseteq Q$) ולכן קומפקטית, ולכן מידה אפס שקולה לנפח אפס. ■

מסקנה 1.3 אם $E_1, E_2 \in \mathcal{J}$ אזי

$$\{E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \backslash E_2\} \subseteq \mathcal{J}$$

שכן

$$\partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2), \partial(E_1 \backslash E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2$$

מסקנה 1.4 אם $E \in \mathcal{J}$ אזי $\text{Int}E \in \mathcal{J}, \overline{E} \in \mathcal{J}$, וכן $\text{Vol}(E) = \text{Vol}(\text{Int}E) = \text{Vol}\left(\overline{E}\right)$.
זה נובע מכך שמותר לשנות ערך של פונקציה אינטגרבילית בקבוצה מנפח אפס בלי לשנות את ערך האינטגרל.

מסקנה 1.5 תהי $E \in \mathcal{J}$, כלומר χ_E אינטגרבילית. מהם סכומי דרבו? תהי P חלוקה, אזי לכל $P_j \in P$ מתקיים

$$M_{P_j} = \begin{cases} 1 & E \cap P_j \neq \emptyset \\ 0 & o/w \end{cases}, m_{P_j} = \begin{cases} 1 & P_j \subseteq E \\ 0 & o/w \end{cases}$$

נסמן

$$E_+ = \bigcup_{E\cap P_j\neq\emptyset} P_j$$

$$E_- = \bigcup_{P_j\subseteq E} P_j$$

אזי כמובן $E_- \subseteq E \subseteq E_+$, וכן

$$S(f,P) = \mathrm{Vol}(E_+), s(f,P) = \mathrm{Vol}(E_-)$$

f אינטגרבילית אם ורק אם

$$\mathrm{Vol}(E_+) - \mathrm{Vol}(E_-) < \varepsilon$$

עבור חלוקה מסויימת. התיבות $E_+ \backslash E_-$ מהוות כיסוי של ∂E, ולכן מאינטגרביליות שוב מתקבל $\mathrm{Vol}(\partial E) = 0$.

מסקנה 1.6 יהיו $E_1, E_2 \in \mathcal{J}$, אזי

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$$

וזאת משום שמתקיים

$$\chi_{E_1} + \chi_{E_2} = \chi_{E_1\cup E_2} + \chi_{E_1\cap E_2}$$

עבור איחוד סופי כלשהו של קבוצות זרות בזוגות,

$$\mathrm{Vol}\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mathrm{Vol}(E_i)$$

עבור $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{J}$, עם $\mathrm{meas}(B_f) = 0$. נגדיר את האינטגרל

$$\int_E f = \int_Q f \cdot \chi_E$$

כאשר $f \cdot \chi_E$ אינטגרבילית שכן

$$B_{f\cdot\chi_E} = B_f \cup B_{\chi_E} = B_f \cup \partial E$$

היא ממידה אפס.