חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

27 בדצמבר 2016

דיברנו על משפט פוביני, בו הייתה לנו $f(x,y)$, כאשר $x\in A\subseteq\mathbb{R}^n$, $y\in B\subseteq\mathbb{R}^m$, שאינטגרבילית על $A\times B$. ראינו שכל פונקציה F עבורה

$$F(x)\in\left\{\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)^*,\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)_*\right\}$$

בכל נקודה x, היא אינטגרבילית על A ומקיימת

$$\int_A F=\int_{A\times B} f$$

בפרט נוכל להגדיר

$$F_1(x)=\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)_*$$
$$F_2(x)=\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)^*$$

ואז נגדיר

$$\varphi=F_2-F_1\geq 0$$

כמו כן,

$$\int_A\varphi=\int_A F_2-\int_A F_1=0$$

ולכן $\varphi\overset{a.e}{=}0$, ולכן למעשה קבוצת הנקודות x שעבורם

$$\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)^*\neq\left(\int_B f_x(y)\,\mathrm{d}y\right)_*$$

היא ממידה 0.

מסקנה 0.1 תהי $f\left(x,y\right)=\varphi\left(x\right)\psi\left(y\right)$, כאשר φ אינטגרבילית על A, ψ אינטגרבילית על B. אזי

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}\varphi\cdot\int\limits_{B}\psi$$

מסקנה 0.2 נניח כי $E_1\subseteq\mathbb{R}^n,E_2\subseteq\mathbb{R}^m$. נניח כי $E_1,E_2\in\mathcal{J}$. אזי $\mathcal{J}\ni E_1\times E_2\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$, ומתקיים

$$\mathrm{Vol}\left(E_1\times E_2\right)=\mathrm{Vol}\left(E_1\right)\cdot\mathrm{Vol}\left(E_2\right)$$

מסקנה 0.3 בפועל, ניקח פונקציות $f_1,f_2:Q\to\mathbb{R}$, עבורן $f_1\leq f_2$, כאשר $Q\subseteq\mathbb{R}^n$. ניקח קבוצה

$$\mathcal{J}\ni E\subseteq\left\{\left(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\right)\mid f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\leq x_{n+1}\leq f_2\left(x_1,\ldots,x_n\right),\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in Q\right\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$$

קבוצה זו היא בין שני גרפים של פונקציות. תהי $g:E\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, אזי

$$\int\limits_{E}g=\int\limits_{x\in Q}\mathrm{d}x\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)}g\,\mathrm{d}x_{n+1}$$

דוגמא ניקח את הקבוצה בין גרפי הפנקציות $f_2\left(x\right)=x$, $f_1\left(x\right)=x^2$. ניקח g מהקבוצה הזו ואז

$$\int\limits_{E}g=\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{x^2}^{x}g\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$
$$\int\limits_{E}g=\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{y}^{\sqrt{y}}g\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x$$

מסקנה 0.4 (פוביני לנפחים) תהי $\mathcal{J}\ni E\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$. נגדיר

$$E_x=\left\{\left(x,y\right)\mid\left(x,y\right)\in E\right\}$$

זהו חתך בערך x ספציפי. כמו כן נגדיר באותו אופן:

$$E_y=\left\{\left(x,y\right)\mid\left(x,y\right)\in E\right\}$$

ממשפט פוביני נקבל

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(E\right) &= \int \chi_E \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y \int \chi_{E_y}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \mathrm{Vol}\left(E_y\right)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

הערה 0.5 משפט פוביני לא מבטיח כי לכל y, $E_y \in \mathcal{J}$. מובטח שקבוצת אותם y שבהם היא לא כזו היא ממידה 0. באופן כללי היינו צריכים לכתוב

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(E\right) &= \int \chi_E \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y \left(\int \chi_{E_y}\,\mathrm{d}x\right)^* = \\ &= \int \left(\mathrm{Vol}\left(E_y\right)\right)^*\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

מסקנה 0.6 (עיקרון קאוואליירי) יהיו $E_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, E_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. נניח כי לכל y מתקיים

$$\mathrm{Vol}\left(E_1\right)_y = \mathrm{Vol}\left(E_2\right)_y$$

אזי מתקיים

$$\mathrm{Vol}\left(E_1\right) = \int \mathrm{Vol}\left(E_1\right)_y\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{Vol}\left(E_2\right)_y\,\mathrm{d}y = \mathrm{Vol}\left(E_2\right)$$

העקרון עובד גם אם נפחי החתכים משתווים פרט לקבוצה מנפח אפס.
בתור דוגמה, חישבנו על הלוח נפח של כדור לפי עיקרון קאוואליירי.

מסקנה 0.7 תהי $\mathcal{J} \ni E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. אם $\mathrm{Vol}\left(E\right) = 0$ אזי $\mathrm{Vol}\left(E_y\right) = 0$ כמעט בכל מקום.

הוכחה:

$$\mathrm{Vol}\left(E\right) = \int \mathrm{d}y\left(\mathrm{Vol}E_y\right)^*$$

לכן

$$\left(\mathrm{Vol}E_y\right)^* \geq 0$$

והאינטגרל הוא 0, ולכן כמעט בכל מקום

$$\left(\mathrm{Vol}E_y\right)^* = 0$$

■

כעת נחשב את נפחו של כדור במרחב $\mathbb{R}^n$, שנסמנו

$$B_n\left(R\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\left|x\right|<R\right\}$$

נסמן

$$\mathrm{Vol}B_n\left(R\right)=\kappa_nR^n$$

אנחנו יודעים כי $\kappa_1=2,\kappa_0=1$, ובשביל הגבוהים יותר מחשבים:

$$\mathrm{Vol}\left(B_{n+1}\left(R\right)\right)=\int\limits_{-R}^{R}\mathrm{d}x_{n+1}\kappa_n\left(\sqrt{R^2-x_{n+1}^2}\right)^n=\left[x_{n+1}=R\sin t\right]=$$

$$=\kappa_nR^{n+1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t\right)^{n+1}\,\mathrm{d}t=\kappa_nR^{n+1}I_{n+1}$$

נצמצם ונקבל

$$\kappa_{n+1}=\kappa_nI_{n+1}$$

האינטגרלים I_n מקיימים כלל רקורסיבי:

$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t\right)^{n+2}\,\mathrm{d}t=\left[intgeration\,by\,parts\right]=\\&=\left(n+1\right)I_n-\left(n+1\right)I_{n+2}\\I_{n+2}&=\frac{n+1}{n+2}I_n\end{aligned}$$

בסך הכל, קל להוכיח באינדוקציה כי מתקיים

$$\begin{aligned}I_{2k}&=\frac{\left(2k-1\right)!!}{\left(2k\right)!!}\cdot\pi\\I_{2k+1}&=\frac{\left(2k\right)!!}{\left(2k+1\right)!!}2\\\kappa_{2k}&=\frac{\left(2\pi\right)^k}{\left(2k\right)!!}=\frac{\pi^k}{k!}\\\kappa_{2k+1}&=2\frac{\left(2\pi\right)^k}{\left(2k+1\right)!!}\end{aligned}$$

נעבור לדון בנפח של מקבילון. נניח שיש לנו $v_1,\ldots,v_n$ ווקטורים בלתי תלויים, נוכל להתבונן במקבילון שהם פורשים:

$$\Pi=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \mid (\lambda_i)_{i=1}^{n}\in[0,1]^n\right\}$$

משפט 0.8 $\Pi\in\mathcal{J}$. אם נבחר בסיס אורתונורמלי $(e_j)_{j=1}^{n}$, ונכתוב

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}v_{i,j}e_j$$

ואז מתקיים

$$\mathrm{Vol}\Pi=\left|\det\left(v_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}\right|$$

הוכחה: ראשית, נשים לב שאינינו תלויים בבחירת הבסיס האורתונורמלי ־ מטריצת המעבר בין שניים כאלה תהיה מדטרמיננטה ±1 ולכן תכפול את הנפח פי 1.
כעת, $\mathrm{Vol}\left(\partial\Pi\right)=0$, שכן השפה היא אוסף הצירופים $\sum\lambda_i v_i$ עבורם איזשהם מבין λ_i הם $0,1$, וזה מרחב מנפח אפס בהכרח.
את הנוסחה נוכיח באינדוקציה. נניח את הנכונות עבור $\mathbb{R}^n$, ונוכיח עבור $\mathbb{R}^{n+1}$. נסמן

$$W=\mathrm{Span}\left\{v_1,\ldots,v_n\right\}$$

ניקח בסיס אורתונורמלי $e_1,\ldots,e_n$ של W, ונשלים אותו על ידי וקטור היחידה e_{n+1} לבסיס של $\mathbb{R}^{n+1}$. כעת, נשתמש במשפט פוביני:

$$\mathrm{Vol}\left(\Pi\right)=\int\limits_{0}^{\langle v_{n+1},e_{n+1}\rangle}\mathrm{d}x_{n+1}\left(\int\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\mathrm{Vol}\Pi_c\right)$$

מהנחת האינדוקציה

$$\mathrm{Vol}\Pi_c=\left|\det\left(v_1,\ldots,v_n\right)\right|$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(\Pi\right)&=\mathrm{Vol}\Pi_c\cdot\langle v_{n+1},e_{n+1}\rangle=\left|\det\begin{pmatrix}v_1&\ldots&v_n\end{pmatrix}\right|\cdot\langle v_{n+1},e_{n+1}\rangle=\\&=\left|\det\begin{pmatrix}v_1&\ldots&v_n&*\\0&0&0&\langle v_{n+1},e_{n+1}\rangle\end{pmatrix}\right|\end{aligned}$$

ולכן סיימנו.
נציג הוכחה אחרת.

טענה 0.9 הצגה קוטבית של מטריצה: בהינתן מטריצה L, קיימות מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית R ומטריצה אורתוגונלית Φ עבורן

$$L = R\Phi$$

הוכחה: נראה מהי R:

$$\begin{aligned} L &= R\Phi \\ L^T &= \Phi^T R^T \\ LL^T &= R\Phi\Phi^T R^T = R^2 \\ R &= \sqrt{LL^T} \end{aligned}$$

כמובן LL^T סימטרית ומוגדרת חיובית, לכן נלכסן אותה ונקבל כי R מוגדרת ביחידות. נקבל כי

$$\Phi = R^{-1}L$$

נרצה להראות שזה יוצא אורתוגונלי:

$$\Phi\Phi^T = R^{-1}LL^T R^{-T} = R^{-1}R^2R^{-1} = I$$

ולכן הוכחנו את הנדרש. ■

אם $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית, נתבונן בפונקציה

$$\nu(E) = \mathrm{Vol}(LE)$$

ν אדיטיבית ואינווריאנטית להזזות. לכן לפי למה שראינו

$$\nu(E) = \nu\left(\boxed{1}\right)\mathrm{Vol}(E)$$

נכתוב $L = R\Phi$ (הצגה קוטבית). Φ אורתוגונלית, ולכן שומרת על הנפח של כל קבוצה בעלת נפח. לכן נותר לחשב

$$\mathrm{Vol}\left(R\boxed{1}\right)$$

לפי משפט מאלגברה לינארית, את R, שהיא סימטרית, ניתן ללכסן בבסיס אורתונורמלי $\{e_1, \ldots, e_n\}$. זהו בסיס עצמי של R, ונותר לחשב את הנפח של קוביית היחידה ביחס אליו. קל לראות שגודל זה הוא מכפלת הערכים העצמיים, כלומר $\det R$. כלומר

$$\nu\left(\boxed{1}\right) = \det R = |\det L|$$

כלומר קיבלנו נוסחה:

$$\mathrm{Vol}\left(LE\right)=\left|\det L\right|\mathrm{Vol}\left(E\right)$$

■