חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

3 בינואר 2017

1 החלפת משתנים

משפט 1.1 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $(x_1,\ldots,x_n)$, ותהי $V\subseteq\mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $(y_1,\ldots,y_n)$. נניח כי קיים דיפאומורפיזם $\varphi:U\to V$. תהי $\mathcal{J}\ni\Omega\subseteq\overline{\Omega}\subseteq V$, ותהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על Ω. אזי $\varphi^{-1}(\Omega)\in\mathcal{J}$, $(f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'(x)|$ אינטגרבילית על $\varphi^{-1}(\Omega)$, וכן

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(\Omega)}(f\circ\varphi)(x)\,|\det\varphi'(x)|\;\mathrm{d}x=\int\limits_{\Omega}f(y)\;\mathrm{d}y$$

הוכחה: נחשוב על U עם הנורמה

$$||x||_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

כדור היחידה כאן הוא למעשה קובייה. אם $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ נסמן $||L||$ את הנורמה האופרטורית של L ביחס לנורמה $||\cdot||_\infty$.

נפעיל את משפט ערך הביניים עבור $||\cdot||_\infty$: תהי $\gamma(t):[0,1]\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, ואז מתקיים

$$\gamma(1)-\gamma(0)=\int\limits_0^1\dot{\gamma}(t)\;\mathrm{d}t$$

הכוונה בסימון הזה היא כמובן לכל רכיב בנפרד. נרצה לחשב:

$$||\gamma(1)-\gamma(0)||_\infty=\left|\left|\int\limits_0^1\dot{\gamma}(t)\;\mathrm{d}t\right|\right|_\infty\le\int\limits_0^1||\dot{\gamma}(t)||_\infty\;\mathrm{d}t\le$$
$$\le\max_{[0,1]}||\dot{\gamma}(t)||_\infty$$

כעת, בהינתן $a,b\in U$ עבורן $[a,b]\subseteq U$, נגדיר $\gamma\left(t\right)=a+t\left(b-a\right)$. נרצה לחשב

$$\begin{aligned}\left|\left|\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)\right|\right|_{\infty}=\left|\left|\varphi\left(\gamma\left(1\right)\right)-\varphi\left(\gamma\left(0\right)\right)\right|\right|_{\infty}=\left|\left|\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)\,\mathrm{d}t\right|\right|_{\infty}\leq\\ \leq\int_{0}^{1}\left|\left|\varphi'\left(\gamma\left(t\right)\right)\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\right|_{\infty}\,\mathrm{d}t\leq\int_{0}^{1}\left|\left|\varphi'\left(\gamma\left(t\right)\right)\right|\right|\cdot\left|\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\right|_{\infty}\,\mathrm{d}t=\\ =\left(\int_{0}^{1}\left|\left|\varphi'\left(\gamma\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t\right|\right|\right)\cdot\left|\left|b-a\right|\right|_{\infty}\leq\max_{[a,b]}\left|\left|\varphi'\left(x\right)\right|\cdot\right|\left|\left|b-a\right|\right|_{\infty}\end{aligned}$$

כעת, בהינתן תחום $V\subseteq\mathbb{R}^{n}$, והעתקה ψ גזירה ברציפות אל $\mathbb{R}^{n}$, אם $Z\subseteq V$ ממידה אפס אז גם $\psi\left(Z\right)$ ממידה אפס. מדוע זה נכון? ראינו שאם f מקיימת תנאי ליפשיץ, היא מעבירה קבוצות ממידה אפס לקבוצות ממידה אפס. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי V תחום חסום: אחרת נציג אותו כאיחוד בן מניה של תחומים $V\cap B_{N}$, כאשר B_{N} כדור, ולקחת $Z_{N}=Z\cap B_{N}$. לכן נניח כי V חסום. נרצה לבנות סדרת קומפקטים עולה כך שהאיחוד שלהם הוא V. ניקח P - חלוקה של $\mathbb{R}^{n}$ לקוביות עם אורכי צלעות $\frac{1}{2^{N}}$, ונסמן K_{N} את איחוד הקוביות מתוכן שנמצאות בתוך V. נקבל מה שרצינו. כל קומפקט K_{N} הוא איחוד סופי של קוביות, ובכל קוביה, ממשפט ערך הביניים Ω מקיימת עליו תנאי ליפשיץ. לכן ψ מעבירה את $Z\cap Q$ לקבוצה ממידה אפס, ולכן גם את כל Z.

חשוב לשים לב שאותו דבר לא נכון על נפח אפס (נעתיק את הכדור במישור לכל המישור, ציר x בתוך הכדור מנפח אפס, אבל יועתק לכל ציר x, שאינו חסום אפילו).

עם זאת, אם $Z\subseteq\overline{Z}\subseteq V$ מנפח אפס, ψ דיפאומורפיזם, אז גם $\psi\left(Z\right)$ מנפח אפס. מדוע? $\mathrm{Vol}\left(Z\right)=\mathrm{Vol}\left(\overline{Z}\right)=0$. $\overline{Z}$ קומפקטית, ולכן $\psi\left(\overline{Z}\right)$ גם כן קומפקט, וממידה אפס - כי $\overline{Z}$ ממידה אפס (בפרט, כי היא מנפח אפס). לכן היא למעשה מנפח אפס: $\mathrm{Vol}\left(\psi\left(\overline{Z}\right)\right)=0$. כעת $\psi\left(Z\right)\subseteq\psi\left(\overline{Z}\right)$, ולכן גם מנפח אפס.

מכאן אם $\Omega\subseteq\overline{\Omega}\subseteq V$ מדידה ז'ורדן, ψ דיפאומורפיזם מתוך V אל U, אזי $\psi\left(\Omega\right)$ גם מדידה ז'ורדן - שכן $Z=\partial\Omega$ סגורה בתוך V ומנפח אפס, וכמו כן $\partial\left(\psi\left(\Omega\right)\right)=\psi\left(\partial\Omega\right)$ כי ψ דיפאומורפיזם, כלומר $\psi\left(\Omega\right)$ מדידה ז'ורדן.

לכן בסך הכל נקבל כי $\varphi\left(\Omega\right)$ מדידה, כמו שצריך במשפט.

כעת, כדי להראות את האינטגרביליות שרצינו, יש הלראות חסימות וכן כי מידת נקודות אי הרציפות היא 0. $f\circ\psi$ חסומה, כי f חסומה. הדטרמיננטה היא רציפה, ולכן חסומה על $\varphi^{-1}\left(\overline{\Omega}\right)$, שהיא קומפקטית. לכן הפונקציה שלנו חסומה. נותר לבדוק את נקודת אי הרציפות שלה: הן בהכרח או בשפה של $\varphi^{-1}\left(\Omega\right)$, או, אם הן בפנים שלה, הן בדיוק נקודות האי רציפות של f. השפה היא ממידה אפס, ואוסף נקודות האי רציפות של f גם כן, כי f אינטגרבילית - לכן הפונקציה שלנו אינטגרבילית.

בשביל לראות את הטענה על האינטגרלים נצטרך כמה למות (לא נספיק השיעור).

למה 1.2 נניח כי G תחום עבורו $G\subseteq\overline{G}\subseteq U$, מדיד ז'ורדן. אם $\varphi:U\to V$ דיפאומורפיזם אזי

$$\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(G\right)\right)\leq\int_{G}\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

הוכחה: נרצה לטעון כי קוביה מאורך צלע 2δ שממורכזת בנקודה a בתוך התחום של דיפאומורפיזם מועתקת על ידי ψ לתוך קוביה מאורך צלע $2K\delta$ עבור

$$K = \sup ||\psi'||_{\infty}$$

כאשר הסופרימום הוא על פני הקובייה. מדוע?

$$||\psi(x) - \psi(a)||_{\infty} \leq \sup_{\square} ||\psi'||_{\infty} ||x-a||_{\infty} \leq K\delta$$

לכן מתקיים גם

$$\mathrm{Vol}\left(\psi\left(\square\right)\right) \leq K^n \mathrm{Vol}\left(\square\right)$$

המשך בשיעור הבא. ■

■

דוגמא ניקח במישור $\mathbb{R}^2$ את התחום Ω להיות $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. נרצה לחשב אינטגרל בתחום זה. נוכל לבצע החלפת משתנה לקואורדינטות פולריות:

$$\varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

כעת, $\varphi^{-1}(\Omega)$ הוא התחום בו $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. בקואורדינטות פולריות - זו תיבה!

$$\varphi'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ולכן $\det(\psi'(r,\alpha)) = r$. לכן נקבל כי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\alpha = \int_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$