חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

5 בנובמבר 2016

בפעם שעברנו דיברנו על העתקות $F:U\to\mathbb{R}^m$ ועל הדיפרנציאל שלהן,

$$D_xF:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

ניזכר שראינו שמתקיים

$$D_xF=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

הגדרה 0.1 אוסף כל ההעתקות הגזירות מקבוצה U אל $\mathbb{R}^m$ שגזירות ברציפות מסומן $C^1\left(U,\mathbb{R}^m\right)$. כלומר, אלה כל ההעתקות F שגזירות לכל $x\in U$, ושהדיפרנציאל שלהן D_xF תלוי באופן רציף בנקודה x.

משפט 0.2 צריך להיות מוכר מחדו"א 2: $F\in C^1\left(U,\mathbb{R}^m\right)$ אם ורק אם לכל i,j $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\in C\left(U,\mathbb{R}^m\right)$, כלומר הנגזרת החלקית j של הקואורדינטה i רציפה.

נדון בשני מקרים פרטיים של העתקות גזירות:

1. מסילות: $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$, $I\subseteq\mathbb{R}$. ניתן לפרק את המסילה לרכיבים

$$\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\left(t\right)\\ \vdots\\ \gamma_m\left(t\right)\end{pmatrix}$$

וכעת את הדיפרנציאל נוכל לכתוב בתור

$$\dot{\gamma}\left(t_0\right)=\frac{d}{dt}|_{t_0}\left(\gamma\left(t\right)\right)=\begin{pmatrix}\dot{\gamma}_1\left(t_0\right)\\ \vdots\\ \dot{\gamma}_m\left(t_0\right)\end{pmatrix}$$

ווקטור זה נקרא גם ווקטור המהירות של המסילה. המסילה נקראת רגולרית בנקודה t_0 אם מתקיים $\dot{\gamma}\left(t_0\right)\neq 0$.

2. העתקה גזירה $F : U \to \mathbb{R}$. אזי $F \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$, ומתקיים

$$D_{x_0}F\left(h\right) = \frac{\partial F}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}h_n$$

ניקח בסיס $e_1, \ldots, e_n$ של $\mathbb{R}^n$ ואת $e_1', \ldots, e_n'$ הבסיס הדואלי של $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$, וכעת לכל $h \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי $e_i'\left(h\right) = h_i$. לכן

$$D_{x_0}F = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}e_i'$$

ומסמנים $e_i' = \mathrm{d}x_i$. לכן כותבים

$$D_{x_0}F = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

הגדרה 0.3 בהינתן פונקציה $F : U \to \mathbb{R}$, נסמן את <u>הגרדיאנט</u> שלה, הווקטור ∇f, בתור הווקטור המקיים

$$DF\left(h\right) = \left\langle \nabla f, h\right\rangle$$

ראינו כבר כי במצב זה

$$D_{x_0}F = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i = \left\langle \begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\end{pmatrix}, h\right\rangle$$

ולכן הווקטור הזה הוא ∇f.

כלל השרשרת יהיו $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ פונקציות. נניח כי F גזירה בנקודה x_0, וכי G גזירה בנקודה $y_0 = F\left(x_0\right)$. אזי $G \circ F$ גזירה בנקודה x_0 ונגזרתה:

$$\begin{aligned} D_{x_0}\left(G \circ F\right) &= D_{y_0}G \cdot D_{x_0}F \\ \frac{\partial\left(G \circ F\right)_i}{\partial x_j} &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial G_i}{\partial x_l}\left(y_0\right) \cdot \frac{\partial F_l}{\partial x_j}\left(x_0\right) \end{aligned}$$

מסקנה 0.4 פונקציה $F : U \to \mathbb{R}^m$ היא גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם כל רכיב F_i של הפונקציה הוא גזיר בנקודה x_0. מתקיים

$$F_i = p_i \circ F$$

כאשר p_i ההטלה על הקוואורדינטה i.

מסקנה 0.5 עבור $F,G:U\to\mathbb{R}^{m}$ גזירות,

$$D\left(\left\langle F,G\right\rangle \right)=G^{T}DF+F^{T}DG$$

תרגיל לבדוק את המסקנה השנייה.

נשים לב למקרה הפרטי $m=1$: $F,G:U\to\mathbb{R}$, ואז

$$D\left(F\cdot G\right)=G\cdot DF+F\cdot DG$$

כעת, תהי $\gamma\left(t\right)$מסילה רציפה עבורה $\gamma\left(0\right)=x_{0}$, $\dot{\gamma}\left(0\right)=h$. מה הוא ווקטור המהירות של המסילה $F\left(\gamma\left(t\right)\right)$ בנקודה $t_{0}=0$, עבור $F:U\to\mathbb{R}^{m}$?

$$\frac{d}{dt}\mid_{t=0}F\left(\gamma\left(t\right)\right)=D_{\gamma\left(0\right)}F\dot{\gamma}\left(0\right)$$

כלומר למעשה

$$\dot{\overline{F\left(\gamma\left(t\right)\right)}}=D_{\gamma\left(0\right)}Fh$$

כלומר

$$DF:\dot{\gamma}\left(0\right)\to\dot{\overline{F\left(\gamma\left(t\right)\right)}}\left(0\right)$$