חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

8 בנובמבר 2016

1 משפטי ערך ביניים

משפט 1.1 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהי $f : U \to \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית. יהי $[a,b] \subseteq U$ קטע. אזי קיימת $c \in [a,b]$ עבורה

$$f(b) - f(a) = D_c f(b-a)$$

הוכחה: נרצה להעריך את $f(b) - f(a)$. נגדיר

$$\varphi(t) = f(a + t(b-a)), t \in [0,1]$$

כעת φ גזירה בכל $[0,1]$, ולכן ממשפט לגראנז' (חדו"א 1), ישנה $\xi \in [0,1]$ עבורה

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

נחשב:

$$\varphi'(\xi) = D_{\varphi(\xi)} f(b-a)$$

■

באופן כללי מתקיים האי שוויון

$$|f(b) - f(a)| \leq ||D_z f|| \, |b-a|$$

לכל $z \in [a,b]$.

הערה 1.2 אפשר להניח כי f גזירה רק על (a,b), ורציפה על $[a,b]$.

הערה 1.3 המשפט לא מתקיים עבור פונקציה וקטורית (שתמונתה בתוך $\mathbb{R}^m$). למשל,

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \varepsilon t \end{pmatrix}$$

עבור $\varepsilon > 0$ כלשהו. כעת $f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\varepsilon \end{pmatrix}$, אבל הנגזרת בכל נקודה תהיה מהצורה $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, ולא ייתכן שגם $\sin$ וגם $\cos$ יתאפסו יחד.

סימון בהינתן מטריצה A מסדר $m \times n$, נגדיר את $R_i(A)$ להיות השורה מספר i של A, ואת $C_i(A)$ להיות העמודה מספר i של A.

הערה 1.4 נשים לב כי

$$\begin{aligned} ||A|| &\geq |R_i(A)| = ||R_i(A)|| \\ ||A|| &\geq |C_i(A)| = ||C_i(A)|| \end{aligned}$$

נשים לב כי עבור מטריצה A, מתקיים

$$||A|| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)} = \left|\left|A^T\right|\right|$$

כמו כן, אם נסמן $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, נקבל

$$|C_1(A)| = |Ax| \leq ||A|| \cdot |x|$$

כך נקבל לכל i כי מתקיים

$$|C_i(A)| \leq ||A||$$

בנוסף מתקיים

$$|C_1(A)| = ||C_1(A)||$$

למעשה, לכל ווקטור $\overline{a}$ מתקיים

$$||\overline{a}|| = |a|$$

וזאת משום שמתקיים

$$||\overline{a}|| = \max_{|x|=1} |t\overline{a}| = |\overline{a}|$$

משפט 1.5 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהי $F : U \to \mathbb{R}^m$ רציפה על U. יהי $[a,b] \subseteq U$ קטע פתוח עבורו F גזירה על (a,b). אזי

$$|F(b) - F(a)| \leq \sup_{(a,b)} ||Df|| \cdot |b-a|$$

הוכחה: די קל לקבל את האי שוויון עם קבוע $\sqrt{m}$ בצד הימני: נכתוב $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$. נשתמש באי השוויון שראינו לפונקציות סקלריות לכל רכיב בנפרד:

$$|F_i(a) - F_i(b)| \leq \sup_{(a,b)} ||DF_i|| \, |b-a| \leq \sup_{(a,b)} ||DF|| \, |b-a|$$

מכאן שמתקיים

$$|F(b) - F(a)| \leq \sqrt{m} \sup_{(a,b)} ||DF|| \, |b-a|$$

כעת נוכיח בלי הקבוע. נגדיר $G = R \circ F$, עבור R טרנספורמציה אורתוגונלית של $\mathbb{R}^m$ כך שהווקטור $R(F(a) - F(b))$ מאונך לציר y_1. משמע

$$G(a) - G(b) \parallel \frac{\partial}{\partial y_1}$$

כאשר משמעות הסימון היא "מקביל". כעת, מכלל השרשרת,

$$DG = D(R \circ F) = R \circ DF$$

ומתקיים

$$||DG|| = ||R \circ DF||$$

אבל R אורתוגונלית, ולכן $||RA|| = ||A||$ לכל A לינארית. ההוכחה של זה - תרגיל. לכן

$$||DG|| = ||DF||$$

כעת, להעתקה G יש שוב m רכיבים. עבורם מתקיים

$$|G_1(a) - G_1(b)| \leq \sup_{(a,b)} ||DG_1|| \, |b-a| \leq \sup_{(a,b)} ||DG|| \, |b-a|$$

בכל שאר הרכיבים, מתקיים

$$0 = G_i(b) - G_i(a)$$

לכן מתקיים

$$|G(b)-G(a)|=|G_1(b)-G_2(a)|\leq\sup_{(a,b)}||DG||\,|b-a|$$

כעת נכתוב $G=R\circ F$, כלומר $F=R^{-1}\circ G$, ואז

$$|R(F(a)-F(b))|\leq\sup_{(a,b)}||DG||\,|b-a|$$

ומכאן נובע

$$|F(b)-F(a)|\leq\sup_{(a,b)}||DF||\,|b-a|$$

■

דוגמה ניזכר כי $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$, ונגדיר

$$F(A)=\det A$$

דטרמיננטה היא פולינום ברכיבים, ולכן F גזירה אינסוף פעמים. נרצה למצוא את DF. בשלב ראשון, נחשב את הדיפרנציאל בנקודה $A_0=I_n$. נוכל להוכיח כי

$$\det(I+tH)=\det A_0=1+t\cdot\mathrm{tr}H+o(t)$$

ומכאן נקבל כי

$$(D_I\det)(H)=\mathrm{tr}H$$

נוכיח את הזהות. נסמן $-\lambda=\frac{1}{t}$.

$$\det(I+tH)=\det\left(t\left(\frac{1}{t}I+H\right)\right)=t^n\det(H-\lambda I)$$

ניזכר כי $\det(H-\lambda I)$ היא הפולינום האופייני של H, שנסמנו P_H. מאלגברה ידוע לנו כי המקדמים המובילים הם $(-1)^n\,\mathrm{tr}H$,$(-1)^n$, והמקדם האחרון הוא $(-1)^n\det H$.

$$P_H=(-1)^n\left(\lambda^n-\mathrm{tr}H\lambda^{n-1}+\cdots+\det H\right)$$

נקבל

$$\det(I+tH)=t^n(-1)^n\left(\left(-\frac{1}{t}\right)^n-\mathrm{tr}H\left(-\frac{1}{t}\right)^{n-1}+\cdots+\det H\right)=1+t\cdot\mathrm{tr}H+o(t)$$

כעת, עבור A_0 אחרת, אם היא הפיכה, המצב עדיין טוב:

$$\begin{aligned}\det\left(A_0+tH\right) &= \det\left(A_0\left(I+tA_0^{-1}H\right)\right)=\det A_0\left(1+t\mathrm{tr}\left(A_0^{-1}H\right)+o\left(t\right)\right)= \\ &= \det A_0+t\det A_0\mathrm{tr}\left(A_0^{-1}H\right)+o\left(t\right)\end{aligned}$$

לכן, עבור A_0 הפיכה מתקיים

$$\left(D_{A_0}\det\right)\left(H\right)=\det A_0\cdot\mathrm{tr}\left(A_0^{-1}H\right)$$

תרגיל

1. מצאו את $D_I\det$ על ידי שימוש בכלל השרשרת.
2. חשבו את $D_{A_0}\det$ עבור A_0 שאינה הפיכה? רמז: יש להשתמש במטריצה המצורפת $\hat{A}=\mathrm{adj}A$.

2 משפט הפונקציה הסתומה

2.1 מבוא

יהיו $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, ותהי $F:\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. נרצה לפתור את המערכת $F\left(x,y\right)=0$, שלה יש m משוואות עם $m+n$ נעלמים. נרצה לחלץ את המשתנים $y_1,\ldots,y_n$. באופן כללי, אם A,B לינאריות, ונכתוב

$$Ax+By=0$$

אזי אם B הפיכה, נוכל לכתוב

$$y=-B^{-1}Ax$$

דוגמה 1 $m=1,n=1$. נתבונן במשוואה

$$F\left(x,y\right)=x^2+y^2=1$$

המטרה היא, שוב, לחלץ את y, כלומר להציג את y כפונקציה של x. מסתבר שבסביבת כל נקודה שאינה $\left(\pm1,0\right)$ ניתן לעשות זאת. מה הבעיה בנקודות המיוחדות? נחשב את הדיפרנציאל:

$$DF=\left(2x,2y\right)$$

הבעיה בנקודות היא שבהן מתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

משפט 2.1 תהי $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ רציפה בסביבה של הנקודה (x_0,y_0), כאשר $x_0\in\mathbb{R}^n, y_0\in\mathbb{R}^m$, שגם מקיימת $F(x_0,y_0)=0$. בנוסף נניח כי לכל x קבוע, הפונקציה F גזירה ברציפות לפי y, כלומר $D^{(y)}F$ היא טרנספורמציה לינארית שתלויה באופן רציף בנקודה (x,y), וכן כי $D^{(y)}F$ הפיכה בנקודה (x_0,y_0). אזי קיימים $\varepsilon,\delta>0$ ופונקציה $f:B(x_0,\delta)\to B(y_0,\varepsilon)$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. f רציפה.
2. לכל $x\in B(x_0,\delta), y\in B(y_0,\varepsilon)$, מתקיים

$$F(x,y)=0\iff y=f(x)$$

3. $f(x_0)=y_0$.