חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

17 בנובמבר 2016

בשיעור הקודם ראינו את משפט ערך הביניים שאומר את הדר הבא:

$$|F(a+h)-F(a)| \leq |h| \cdot \sup_{z\in(a,a+h)} ||D_zF||$$

נתבונן במקרה הפרטי בו נציב $F-L$ עבור L לינארית כלשהי.

$$\begin{aligned}
|F(a+h)-F(a)-L(a+h)+L(a)| &\leq |h| \sup_{z\in(a,a+h)} ||D_zF-L|| \\
|F(a+h)-F(a)-L(h)| &\leq |h| \sup_{z\in(a,a+h)} ||D_zF-L||
\end{aligned}$$

מסקנה 0.1 אם $F: U \to \mathbb{R}^m$ גזירה בכל נקודה פרט לנקודה z_0, וכן

$$\lim_{z\to z_0} D_zF = L$$

אזי F גזירה גם בנקודה z_0 ומתקיים $D_{z_0}F = L$.

כעת, תהי $F: U \to \mathbb{R}^m$. בהינתן $a,b \in U$, תהי $\gamma: [0,1] \to U$ מסילה גזירה ברציפות עבורה $\gamma(0)=a, \gamma(1)=b$. אזי ממשפט ניוטון לייבניץ,

$$\begin{aligned}
|F(a)-F(b)| &= \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 D_{\gamma(t)}F\cdot(\dot\gamma(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|D_{\gamma(t)}F\cdot(\dot\gamma(t))\right|\mathrm{d}t \leq \\
&\leq \int_0^1 \left|\left|D_{\gamma(t)}F\right|\right| |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \leq \sup_{z\in[0,1]} D_{\gamma(z)}F \cdot \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

כאשר האינטגרל האחרון הוא למעשה אורך המסילה γ.
כעת נחזור למשפט הפונקציה הסתומה, שניסחנו בשיעור שעבר.
ניזכר כי $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. נגדיר

$$f(A) = \det A$$

ראינו שזו העתקה רציפה וכן כי

$$D_A f(H) = \det A \cdot \operatorname{tr}\left(A^{-1} H\right)$$

ניזכר במטריצה המצורפת, $\det A \cdot A^{-1} = \hat{A}$, ונקבל

$$D_A f(H) = \operatorname{tr}\left(\hat{A} H\right)$$

כעת נתבונן בקבוצה

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

הקבוצה $f(A) = 1$ היא משטח בתוך $\mathbb{R}^n$, וכן f מקיימת את משפט הפונקציה הסתומה, לכן לכל A עבורה $\det A = 1$ מתקיים $D_A f \neq 0$, כלומר אחת הנגזרות החלקיות אינה 0. f היא פונקצהי של כניסות המטריצה, כלומר n^2 משתנים. אם באופן מקומי, הנגזרת לפי האחרון אינה 0, אזי הקואורדינטה האחרונה תלוייה באחרות בסביבה הזו.

בהוכחת משפט הפונקציה הסתומה ניעזר במשפט הבא:

משפט 0.2 יהי (X,d) מרחב מטרי שלם, כלומר מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת. תהי $\varphi : X \to X$ העתקה מכווצת, כלומר שקיים קבוע $\alpha \in (0,1)$ עבורו מתקיים $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \alpha d(x,y)$. אזי קיימת ויחידה נקודת שבת x_*, כלומר $\varphi(x_*) = x_*$.

דוגמאות מרחבים מטריים שלמים:

1. $\mathbb{R}^n$ לכל n.
2. $X = \{f : K \to \mathbb{R}\}$ כאשר f רציפה, K קומפקטית. המטריקה היא $d(f,g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$.

תרגיל יהי (X,d) מרחב מטרי שלם. תהי $Z \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אזי (Z,d) מרחב מטרי שלם.