<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3</u>

© ארזים

15 בנובמבר 2016

ניזכר בניסוח של משפט הפונקציה הסתומה:

משפט 0.1 תהי $F:U\to\mathbb{R}^m$, כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$. נסמן $F(z)=F(x,y)$, כאשר $x_1,\ldots,x_m=z_1,\ldots,z_m,y_1,\ldots,y_n=z_{m+1},\ldots,z_{m+n}$. נכתוב את F לפי רכיבים: $F(F_1,\ldots,F_m)$. נניח $F\in C(U)$, ונניח כי F גזירה לפי y בסביבה U, וכן כי $\frac{\partial F}{\partial y}$ תלוי באופן רציף בנקודה (x,y) (כלומר העתקת הדיפרנציאל לפי y היא פונקציה רציפה). בנוסף, נניח כי עבור (x_0,y_0)מתקיים $F(x_0,y_0)=0$, וכי $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ היא טרנספורמציה לינארית הפיכה. אזי קיימים $\delta>0,\varepsilon>0$ ופונקציה $f:B_{x_0,\delta}\to B_{y_0,\varepsilon}$ כך שמתקיים $B_{x_0,\delta}\times B_{y_0,\varepsilon}\subseteq U$, וכן לכל $x\in B_{x_0,\delta},y\in B_{y_0,\varepsilon}$, מתקיים $F(x,y)=0\iff y=f(x)$. כמו כן, $f(x_0)=y_0$.

דוגמא נגדיר

$$F(x,y)=x^2+y^2-1$$

במצב זה מתקיימים תנאי המשפט, והפונקציה היא $y=\pm\sqrt{x^2-1}$, בהתאם לנקודה (לפי הסימן של y_0).

אנחנו הולכים להוכיח את המשפט בשיטה של העתקות כיווץ.

הגדרה 0.2 יהי (X,d) מרחב מטרי שלם. T היא העתקה מכווצת אם קיים $0\leq\alpha\leq 1$ כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים

$$d(Tx,Ty)\leq\alpha d(x,y)$$

בשיעור שעבר ראינו כי אם T העתקה מכווצת במרחב מטרי שלם, אזי קיימת ויחידה נקודת שבת x_*, כלומר $Tx_*=x_*$. בנוסף, כדי למצוא את נקודת השבת, ניתן לקחת נקודה x_0 כלשהי ולהגדיר

$$x_n=T^nx_0$$

זו תהיה סדרת קושי (קל לבדוק) ותשאף לנקודת השבת x_*, בבירור. כתרגיל ־ חסמו מלמעלה את $d(x_n,x_*)$ כפונקציה של α, מקדם הכיווץ, והמרחק המקורי $d(x_*,x_0)$.

כעת נוכיח את משפט הפונקציה הסתומה.

הוכחה: ראשית, נכתוב מחדש את המשוואה $F(x,y)=0$ בצורה אחרת ושקולה. נסמן $M=\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}$, ונגדיר:

$$A(x,y) \coloneqq y - M(F(x,y))$$

כעת ברור כי

$$F(x,y)=0 \iff A(x,y)=y$$

כעת נגזור את A לפי y:

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \mathrm{Id} - M\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = M\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

מכאן נקבל

$$\left|\left|\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)\right|\right| \leq ||M||\cdot\left|\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\right|$$

כעת, כיוון שהדיפרנציאל לפי y של F הוא רציף, אם נבחר $|x-x_0|,|y-y_0| \leq r$, נוכל לכתוב

$$\left|\left|\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)\right|\right| \leq ||M||\cdot\left|\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\right| \leq q(r)$$

עבור פונקציה q המקיימת

$$\lim_{r\to 0} q(r) = 0$$

למעשה ניתן לקחת

$$q(r) = ||M||\cdot\sup_{\substack{|x-x_0|<r\\|y-y_0|<r}}\left|\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\right|$$

כמו כן, נוכל גם לכתוב, ממשפט ערך הביניים,

$$|A(x,y_1) - A(x,y_2)| \leq |y_1-y_2|\sup_{y\in[y_1,y_2]}\left|\left|\frac{\partial A}{\partial y}(x,y)\right|\right|$$

כעת, משילוב של אי השוויונות האחרונים, מתקיים

$$|A(x,y_1) - A(x,y_2)| \leq q(r)\,|y_1-y_2|$$

לבסוף נשים לב גם כי

$$\begin{aligned} |A(x,y_0)-y_0| &= |y_0-MF(x,y_0)-y_0| = |MF(x,y_0)| \overset{*}{\leq} \\ &\overset{*}{\leq} ||M||\,|F(x,y_0)-F(x_0,y_0)| \leq p(r) \end{aligned}$$

אי השוויון שמסומן * נכון משום שנתון $F(x_0,y_0)=0$, והפונקציה p מוגדרת

$$p(r) = ||M|| \cdot \sup_{|x-x_0|<r} |F(x,y_0)-F(x_0,y_0)|$$

ומרציפות F מתקיים

$$\lim_{r\to 0} p(r) = 0$$

כעת, עבור $|x-x_0|<r, |y_1-y_0|<r$, מתקיים

$$|A(x,y_1)-y_0| \leq |A(x,y_1)-A(x,y_0)| + |A(x,y_0)-y_0|$$

כעת נפעיל את אי השוויונים שהוכחנו כבר על כל אחד מהגורמים, ונקבל

$$\begin{aligned} |A(x,y_1)-y_0| &\leq |A(x,y_1)-A(x,y_0)| + |A(x,y_0)-y_0| \leq \\ &\leq p(r) + q(r)\,|y_0-y_1| \leq p(r) + rq(r) \end{aligned}$$

כעת, נבחר $\varepsilon>0$ קטן מספיק כך שמתקיים $q := q(\varepsilon) < 1$. כמו כן, נבחר $0<\delta\leq\varepsilon$ עבורו

$$\begin{aligned} p(\delta) + q\cdot\varepsilon &< \varepsilon \\ p(\delta) &< \varepsilon(1-q) \end{aligned}$$

עבור בחירה זו של ε,δ, מתקיים ראשית שלכל $x\in\overline{B_{x_0,\delta}}$, ההעתקה $A(x,y)$ מקיימת $A:\overline{B_{y_0,\varepsilon}} \to B_{y_0,\varepsilon}$ וכן היא העתקה מכווצת. הכדור $\overline{B_{y_0,\varepsilon}}$ הוא קבוצה סגורה בתוך $\mathbb{R}^m$, ולכן הוא מרחב מטרי שלם. לפי המשפט שראינו בשבוע שעבר, לכל $x\in\overline{B_{x_0,\delta}}$ קיימת ויחידה נקודת שבת $f(x)\in B_{y_0,\varepsilon}$, שעבורה

$$A(x,f(x)) = f(x)$$

וכמובן $F(x,f(x))=0$.
נרצה להראות שפונקציה זו רציפה. נגדיר סדרת פונקציות על $\overline{B_{x_0,\delta}}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= y_0 \\ f_{n+1}(x) &= A(x,f_n(x)) \end{aligned}$$

בבירור, כל f_n היא רציפה, וכן יש התכנסות נקודתית $f_n \to f$. כמו כן, יש התכנסות במידה שווה:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n+1}(x)| &= |A(x, f(x)) - A(x, f_n(x))| \le q\,|f(x) - f_n(x)| \le q^{n+1}\,|f(x) - f_0(x)| \le \\ &\le q^{n+1}\,|f(x) - y_0| \le q^{n+1}\varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

מחדו"א 2, פונקציות רציפות מתכנסות במידה שווה לפונקציה רציפה, ולכן f רציפה. ■

משפט 0.3 נניח את כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה, ובנוסף גם כי $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ קיימת ורציפה (כלומר העתקת הדיפרנציאל לפי x רציפה). אזי הפונקציה הסתומה f גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, f(x_1))$$

הערה 0.4 הטענה המרכזית כאן היא על הגזירות ברציפות. הנוסחה נובעת מיידית על ידי

$$F(x, f(x)) = 0$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, ולכן אם נוכיח כי f גזירה נוכל להפעיל את כלל השרשרת:

$$0 = \frac{\partial F(x, f(x))}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)$$

דוגמא נחזור לדוגמא

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ונסמן את הפונקציה הסתומה $y(x)$, אזי

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 + (y(x))^2 - 1 &= 0 \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ 2 + 2y'^2 + 2yy'' &= 0 \end{aligned}$$

וכך ניתן להמשיך, כל עוד F גזירה.

מסקנה 0.5 אם F גזירה ברציפות k פעמים, אזי גם הפונקציה הסתומה f גזירה ברציפות k פעמים, ואת הנגזרות ניתן למצוא באופן רקורסיבי.