חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

8 בנובמבר 2016

1 חזרה

1.1 קומפקטיות

משפט 1.1 התנאים הבאים שקולים עבור $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. K סגורה וחסומה.
2. לכל כיסוי פתוח של K יש תת כיסוי סופי.
3. לכל $f \in C(K, \mathbb{R})$, f חסומה.
4. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq K$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול $x \in K$.

הוכחה: $2 \iff 1$: משפט מחדו"א 2.
$1 \Rightarrow 3$: הפונקציה $||\cdot||$ חסומה על K, ולכן K חסומה. אם $y \in \partial K \backslash K$ נקח $f = \frac{1}{||y-x||}$, וזו לא חסומה (נקח סדרה $\{x_n\} \subseteq K$ שמכתנסת אל y).
$3 \Rightarrow 2$: תהא $f : K \to \mathbb{R}$ רציפה. מתקיים

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\left((-i, i)\right)$$

מטענה מתרגיל בית, $f^{-1}\left((-i,i)\right) = K \cap U_i$ כאשר $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. אזי $K \subseteq \bigcup U_i$. ניקח תת כיסוי סופי, ונסיק כי $K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_l}$, ואז $|f| \le \max\{i_1, \ldots, i_l\}$.
$4 \Rightarrow 1$: תהא $\{x_n\} \subseteq K$. סדרה זו חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת, שנסמן את גבולה k. K סגורה, ולכן $k \in K$.
$1 \Rightarrow 4$: אם K לא חסומה, ניקח $x_n \in K$ עבורו $||x_n|| > n$. $\{x_n\}$ מתבדרת. אם $y \in \partial K \backslash K$ נקח $\{x_n\} \subseteq K$ עבורה $x_n \to y$, וכל תת סדרה שלה תתכנס אל y, אבל $y \notin K$ - סתירה. ■

1.2 קשירות

הגדרה 1.2 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת <u>קשירה מסילתית</u> אם לכל $x, y \in A$ יש $\gamma : [0,1] \to A$ רציפה עבורה $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

משפט 1.3 עבור $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, התנאים הבאים שקולים:

1. U קשירה מסילתית.
2. U קשירה פוליגונלית.

בשביל ההוכחה משתמשים בתרגיל:

תרגיל אם K קומפקטית, $f:K\to\mathbb{R}^m$ רציפה, אז $f\left(K\right)$ קומפקטית.

הוכחה: מוכרת מחדוא 2. סביב כל נקודה על המסילה בין x,y ניקח כדור שמוכל בקבוצה. המסילה קומפקטית, כי היא התמונה של $[0,1]$, ולכן יש תת כיסוי סופי של הכדורים האלה, ואז ניתן לקחת קטעים שמעבירים בין החיתוכים של הכדורים הללו. ∎

1.3 נורמות של מטריצות

הגדרה 1.4 לכל $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינארית, נגדיר

$$||A||_{HS}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2},||A||=\sup_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}$$

נשים לב כי מתקיימים שני דברים: לכל A,B לינאריות, ולכל x,

$$\begin{aligned}||Ax|| &\leq ||A||\,||x||\\ ||AB|| &\leq ||A||\,||B||\end{aligned}$$

בנוסף, כל הנורמות שקולות, כלומר

$$A_n\xrightarrow{HS}A\iff A_n\xrightarrow{||\cdot||_2}A$$

משפט 1.5 אוסף המטריצות הלכסינות צפוף בתוך $M_n\left(\mathbb{C}\right)$.

הוכחה: ראשית, נשים לב כי נורמה אופרטורית נשמרת בדימיון (תרגיל). נקח $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$, וניקח $B=PAP^{-1}$ משולשית עליונה. נסמן את איברי האלכסון של B בתור $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. נגדיר $\tilde{B}_\varepsilon$ שזהה בכל מקום למטריצה B - פרט לאיברי האלכסון, שאותם נשנה מעט מאוד, לכל היותר ε, כך שכולם יהיו שונים. אז $B\xrightarrow[HS]{\varepsilon\to0}\tilde{B}_\varepsilon$, כלומר $B\xrightarrow[||\cdot||_2]{\varepsilon\to0}\tilde{B}_\varepsilon$. לכן $A=P^{-1}BP\to P^{-1}\tilde{B}_\varepsilon P$, אבל $P^{-1}\tilde{B}_\varepsilon P$ לכסינה, ולכן סיימנו. ∎

מסקנה 1.6 לכל $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ מתקיים $f_A\left(A\right)=0$, כאשר f_A הפולינום האופייני של A.

הוכחה: אם $A=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$, אזי

$$f_A\left(A\right)=\left(A-\lambda_1I\right)\ldots\left(A-\lambda_nI\right)=0$$

כעת נכתוב $f_A(x)=\sum a_i(A)\cdot x^i$, וכעת $a_i(A)$ פונקציות רציפות - פולינומים בכניסות המטריצה. לכן, $f_A(A)=\sum a_i(A)A^i$ גם כן רציפה. ניקח $B_n\to A$ כאשר B_n לכסינה לכל n, ולכן

$$0=f_{B_n}(B_n)\to f_A(A)$$

ולכן סיימנו. ■