חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

ⓒ ארזים

26 באפריל 2017

בשיעור שעבר דנו בשטח של של הספירה בתוך $\mathbb{R}^3$. כעת נרצה לחשב את השטח של כיפה ספירית, ונעשה זא תבעזרת קואורדינטות פולריות. כיפה ספרית היא

$$S_\psi = \{(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi, \sin\theta, \cos\theta) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \psi\}$$

כאשר $0 < \psi < \pi$ כלשהי. נתבונן בפרמטריזציה

$$r(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)$$

בעקרון הפרמרטיזציה כרגע לא טובה, כי היא צריכה לבוא מתחום, אבל אפשר להסיר קבוצות זניחות ולקבל פרמטריזציה טובה, ולכן זה לא משנה לשטח. נצטמצם לתחום $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \psi)$. נחשב:

$$\begin{aligned} r_\varphi &= (-\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, 0) \\ r_\theta &= (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta) \end{aligned}$$

כעת

$$\Gamma(r_\varphi, r_\theta) = \det\begin{pmatrix} (r_\varphi, r_\varphi) & (r_\varphi, r_\theta) \\ (r_\theta, r_\varphi) & (r_\theta, r_\theta) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin^2\theta$$

לכן

$$v_2(S_\psi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\psi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\psi}\sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 2\pi(1-\cos\psi)$$

בשלב הזה היה דיבור ארוך על ספירות משיקות בשני מימדים ובשלושה מימדים. כמובן שזה כולל המון ציורים שאין לי דרך להכניס כאן. לסיכום - כמות המעגלים שאפשר להדביק שישיקו למעגל מסויים, כך שכולם משיקים לצמודים להם, היא לכל היותר 6 (אפשר 6, לא יותר). בשלושה מימדים אפשר 12. ניוטון התעניין בזה, אבל זה נפתר רק במאה שעברה.

0.1 נוסחת קו־שטח

("משפט פוביני עקום") ניזכר: אם יש לנו $M\subseteq\mathbb{R}^n$ על משטח שמוגדר כגרף

$$M=\left\{x\mid x_n=\varphi\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right),\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)\in W\right\}$$

כאשר $W\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$. ראינו כי עבור הפרמטריזציה הסטנדרטית $r\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)=\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\varphi\left(x_n\right)\right)$, מתקיים

$$\Gamma=1+\left|\nabla\varphi\right|^2$$

לכן נקבל כי

$$v_{n-1}\left(M\right)=\int\limits_W\sqrt{1+\left|\nabla\varphi\right|^2}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$$

כעת אם $f:M\to\mathbb{R}$ "טובה מספיק" אזי

$$\int\limits_M f\,\mathrm{d}S=\int\limits_W f\sqrt{1+\left|\nabla\varphi\right|^2}\,\mathrm{d}x\ldots\mathrm{d}x_{n-1}$$

אם בנוסף M מוגדר כקבוצת האפסים של $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, כאשר Φ רגולרית, אז ראינו כי

$$\Gamma=\frac{\left|\nabla\Phi\right|}{\left|\Phi_{x_n}\right|}$$

נניח כי $V\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום, ותהי $\Phi:V\to\mathbb{R}$ פונקציה עבורה $\nabla\Phi\neq0$ בכל נקודה של V. נסמן $\Phi\left(V\right)=\left(a,b\right)$ (קטע כי V קשירה, פתוח כי הגרדיאנט לא מתאפס ־ משפט ההעתקה הפתוחה). אם $c\in\left(a,b\right)$ נוכל להגדיר

$$M_c=\left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in V\mid\Phi\left(x_1,\ldots,x_n\right)=c\right\}$$

זו יריעה ממימד $n-1$.

משפט 0.1 (נוסחת קו־שטח) אם $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם תומך קומפקטי בתוך V, אזי

$$\int\limits_V f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\mathrm{d}c\left(\int\limits_{M_c}\frac{f\left(x\right)}{\left|\nabla\Phi\left(x\right)\right|}\,\mathrm{d}S\right)$$

ניתן דוגמה: נתבונן בפונקציה $f(x)=(x,v)$, כאשר $v\in\mathbb{R}^n$ קבוע. נרצה לדעת מה העובי של השכבה בה $0\le f(x)\le s$, כאשר $s>0$. נבדוק מתי $(tv,v)=s$ ־ כמובן, כאשר $t=\frac{s}{(v,v)}$. לכן

$$tv=\frac{sv}{(v,v)}$$

ואז

$$d=|tv|=\left|\frac{sv}{(v,v)}\right|=\frac{s}{|v|}$$

במקרה הכללי, נוכל לכתוב

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)+(\nabla\Phi(x),h)+o(h)$$

לכן אם נתעניין בעובי של $c\le\Phi\le c+\Delta c$, כאשר $c=\Phi(x)$, נקבל כי

$$0\le(\nabla\Phi(x),h)+o(h)$$

לכן העובי של השכבה בין M_c לבין $M_{c+\Delta c}$ ליד x שווה לערך $\frac{\Delta c}{|\Phi(x)|}$.