חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

3 במאי 2017

1 נוסחת קו־שטח

נתון לנו על משטח $M \subseteq \mathbb{R}^n$ הנתון כגרף:

$$M = (x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = h(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in W)$$

כאשר $h : W \to \mathbb{R}$, $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ פתוחה. נסמן בתור r את הפרמטריזציה הסטנדרטית $r(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}))$. נניח כמו כן כי M היא אוסף הפתרונות של $\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, כאשר ϕ רגולרית על M. כעת, אם $f : M \to \mathbb{R}$ טובה מספיק (למשל אינטגרבילית רימן), ראינו שמתקיים

$$\int\limits_M f \,\mathrm{d}S = \int\limits_W (f \circ r) \cdot \sqrt{1 + |\nabla h|^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} = \int\limits_W (f \circ r) \cdot \frac{|\nabla \phi \circ r|}{\left|(\phi \circ r)_{x_n}\right|} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}$$

משפט 1.1 יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $\phi : V \to \mathbb{R}$ חלקה ורגולרית, ונסמן $\phi(V) = (a, b)$. לכל $c \in (a, b)$ נגדיר

$$M_c = \phi^{-1}(c)$$

וזהו על משטח חלק. כעת, אם $f : V \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם תומך קומפקטי בתוך V, מתקיים

$$\int\limits_V f(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}c \int\limits_{M_c} \frac{f(x)}{|\nabla \phi(x)|} \,\mathrm{d}S$$

הוכחה: ראשית ננסח ונוכיח טענה מקומית.

טענה 1.2 לכל נקודה $p \in V$ קיים $\delta_p > 0$ כך שלכל פונקציה $f : V \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם $\mathrm{supp} f \subseteq B(p, \delta_p)$, המשפט נכון.

הוכחה: תהי $p \in V$. אזי $\nabla\phi\left(p\right) \neq 0$, ונניח בלי הגבלת הכלליות כי $\phi_{x_n}\left(p\right) \neq 0$. נגדיר את ההעתקה $F : V \to \mathbb{R}^n$ על ידי

$$F\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

נחשב את היעקוביאן:

$$J_F\left(p\right) = \det\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ * & \phi_{x_n} \end{pmatrix}$$

ממשפט ההעתקה ההפוכה, קיימת סביבה $p \in V' \subseteq V$ כך שהצמצום $F\mid_{V'}$ הוא דיפאומורפיזם לתמונתו. אפשר להניח $F\left(V'\right) = W \times \left(a', b'\right)$, כאשר $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ תובה פתוחה, $a \leq a' < b' \leq b$. נסמן

$$G = \left(F\mid_{V'}\right)^{-1} : F\left(V'\right) \to V'$$

ונסמן

$$G = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right) = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)$$

כאשר $\psi : W \times \left(a', b'\right) \to \mathbb{R}$. אם נניח כי $\operatorname{supp}\left(f\right) \subseteq V$ נקבל

$$\begin{aligned}\int\limits_V f\left(x\right)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{V'} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{F\left(V'\right)} \left(f \circ G\right)\left|J_G\right|\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_{W \times \left(a', b'\right)} f \circ G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right) \cdot \frac{1}{\left|J_F\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}c\end{aligned}$$

ממשפט פוביני נקבל שהשוויון הזה ממשיך:

$$\int\limits_V f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = \int\limits_{a'}^{b'} \mathrm{d}c \int\limits_W \frac{f \circ G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}$$

לכל c קבוע, ההעתקה $\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) \mapsto G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right) = \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, c\right)\right)$ היא העתקה $W \to \mathbb{R}^n$ - כלומר מפה של היריעה M_c שנתונה בצורת גרף. כעת,

$$G \circ F\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

אם כן,

$$\begin{aligned}G \circ F\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= G\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) = \\ &= \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)\right)\end{aligned}$$

ומכאן $x_n = \psi\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\phi\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)$.
כעת,

$$M_c\cap V'=\left\{G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\mid\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)\in W\right\}$$

יש לנו הצגה סתומה בגלל ההגדרה של M_c בתור $\{\phi=c\}$. המקדם Γ עבור המפה שלנו, כאשר c קבוע, הוא

$$\Gamma=\frac{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}$$

אם כן,

$$\begin{aligned}\int\limits_V f\left(x\right)\,\mathrm{d}x&=\int\limits_{a'}^{b'}\mathrm{d}c\int\limits_W\frac{f\circ G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}=\\&=\int\limits_{a'}^{b'}\mathrm{d}c\int\limits_W\frac{f\circ G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)}{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}\frac{\left|\nabla\phi\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}{\left|\phi_{x_n}\left(G\left(x_1,\ldots,x_{n-1},c\right)\right)\right|}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\\&=\int\limits_{a'}^{b'}\mathrm{d}c\int\limits_{M_c}\frac{f}{\left|\nabla\phi\right|}\,\mathrm{d}S=\int\limits_a^b\mathrm{d}c\int\limits_{M_c}\frac{f}{\left|\nabla\phi\right|}\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

■

■