

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

26 ביוני 2017

1 שאלות ממבחנים

שאלה (מועד א' סמסטר ב' 2016) יהיו $v, w \in \mathbb{R}^3$ שני ווקטורים אורתונורמליים. חשבו את

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \langle x, v \rangle^{20} \langle x, w \rangle^{16} e^{-|x|} dx_1 dx_2 dx_3$$

פתרון יהי u ווקטור שמשלים את v, w לבסיס אורתונורמלי. עבור $y \in \mathbb{R}^3$ נכתוב

$$y = (y_1, y_2, y_3) = y_1 u + y_2 v + y_3 w$$

כעת נבצע החלפת משתנה אורתוגונלית ונקבל

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} y_2^{20} y_3^{16} e^{-|y|} dy_1 dy_2 dy_3$$

מנוסחת קו שטח על ספירות:

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \rho^2 \int_{S^2} \rho^{20} y_2^{20} \rho^{16} y_3^{16} e^{-\rho} dS d\rho = \underbrace{\int_0^\infty \rho^{38} e^{-\rho} d\rho}_{\Gamma(39)} \cdot \underbrace{\int_{S^2} y_2^{20} y_3^{16} dS}_{I_2}$$

נגדיר כעת $f(y) = y_2^{20} y_3^{16} e^{-|y|^2}$, ואז

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) dy_1 dy_2 dy_3 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_1^2} dy_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_2^2} y_2^{20} dy_2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_3^2} y_3^{16} dy_3 \right) = \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{21}{2}\right) \Gamma\left(\frac{17}{2}\right) \end{aligned}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) dy_1 dy_2 dy_3 &= \int_0^\infty \rho^2 \int_{S^2} f(\rho y) dS d\rho = \\ &= \int_0^\infty \rho^{38} e^{-\rho^2} \int_{S^2} y_2^{20} y_3^{16} dS d\rho = \\ &= \Gamma\left(\frac{39}{2}\right) I_2 \end{aligned}$$

בסך הכל:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{17}{2}\right) \Gamma\left(\frac{21}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{39}{2}\right)} \\ I &= \Gamma(39) I_2 \end{aligned}$$

תרגיל תהינה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f_i$ עם $1 \leq i \leq n$, הומוגניות מדרגה $p \neq -1$:

$$f_i(tx) = t^p f_i(x)$$

לכל $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ולכל $t > 0$. נגדיר תבנית

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

ונניח שהיא סגורה. הראו כי

$$F(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$$

היא קדומה של ω בכל $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

פתרון נשתמש בנוסחת אויילר (קל להוכיח, קשה לזכור): אם g הומוגנית מדרגה p , אזי

$$\langle \nabla g(x), x \rangle = pg(x)$$

נוכיח ברגע: נזכור כי $g(tx) = t^p g(x)$. נגזור לפי t :

$$\langle \nabla g(tx), x \rangle = pt^{p-1} g(x)$$

ונציב $t = 1$. נחזור לשאלה: נרצה להראות

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$$

נחשב:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{1}{p+1} \left(\sum_{i=1}^n \delta_{i,j} f_i(x) + x_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{1}{p+1} \left(f_j(x) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{p+1} (f_j(x) + \langle \nabla f_j(x), x \rangle) = \\ &= \frac{1}{p+1} (f_j(x) + p f_j(x)) = f_j(x)\end{aligned}$$

תרגיל (2011, בחינה של שירי ארטשטיין) חשבו את

$$\int_{\gamma} x e^x dx + x y dy$$

כאשר γ מסילת רבע מעגל מהנקודה $(1, 0)$ אל הנקודה $(0, 1)$.

פתרון נסמן γ_2 ישר מהראשית אל $(1, 0)$, וכן γ_1 ישר מהנקודה $(0, 1)$ אל הראשית. נגדיר $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma$ (יש שמסמנים את זה איחוד). זו מסילה סגורה. נקרא לתחום שהיא חוסמת G . לפי משפט גרין:

$$\int_{\Gamma} x e^x dx + x y dy = \int_G y dx dy = I$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}I &= \int_{\gamma_1} x e^x dx + x y dy + \int_{\gamma_2} x e^x dx + x y dy + \int_{\gamma} x e^x dx + x y dy = \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 t e^t dt + \int_{\gamma} x e^x dx + x y dy = \\ &= 0 + 1 + \int_{\gamma} x e^x dx + x y dy\end{aligned}$$

נותר לחשב את I . נעבור לקואורדינטות פולריות:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sin \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin \theta d\theta = \frac{1}{3}$$

בסך הכל, האינטגרל בשאלה הוא $-\frac{2}{3}$.