

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

27 במרץ 2017

1 יריעות

הגדרה 1.1 יהיו $0 < k < n$ טבעיים. תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא יריעה k מימדית אם מתקיים אחד מבין ארבעת התנאים הבאים:

1. לכל $x \in M$ קיימת סביבה O של x בתוך \mathbb{R}^n כך שהחיתוך $M \cap U$ זה גרף של פונקציה $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$.

2. לכל $x \in M$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ כך שמתקיים

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$$

3. M היא מקומית בעלת פרמטריזציה טובה.

4. M היא מקומית בעלת הצגה סתומה טובה.

תרגיל הראו כי הגליל

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$$

הוא יריעה דו מימדית.

פתרון נתבונן בפרמטריזציה:

$$r(\theta, t) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$$

כאשר $-1 < t < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$. זו לא פרמטריזציה טובה - המקור שלה לא פתוח. הדרך לטפל בבעיה היא להגדיר שתי פרמטריזציות:

$$r_1(\theta, t) = r_2(\theta, t) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$$

כאשר $-1 < t < 1$ לשתיהן, אבל עבור r_1 , $0 < \theta < 2\pi$, ועבור r_2 , $-\pi < \theta < \pi$. שתי אלה פרמטריזציות טובות. ולכל נקודה $(x, y, z) \in M$, אם $x \neq 1$ אזי r_1 פרמטריזציה טובה בסביבת הנקודה, ואם $x = 1$ אזי r_2 פרמטריזציה טובה.

נתבונן בספירה:

$$S^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1 \right\}$$

יריעה זו היא $n - 1$ מימדית. קל להראות זאת באמצעות הצגה סתומה.

תרגיל לכל $x \in S^{n-1}$, מצאו פרמטריזציה טובה מקומית (הטלה סטריאוגרפית).

פתרון ראשית נדון במקרה הדו מימדי. נבצע את ההטלה בצורה גיאומטרית - בהינתן נקודה על הספירה, נחבר אותה בישר לקוטב הצפוני $(0, 1)$, ונעתיק אותה לנקודת החיתוך של הישר הזה עם ציר x . אפשר לחשב ולמצוא כי

$$\varphi_N(x, y) = \frac{x}{1 - y}$$

זו העתקה חד-חד-ערכית ועל מהספירה (בלי הקוטב הצפוני) אל \mathbb{R} . ההופכית שלה היא

$$\varphi_N^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)$$

באותו אופן נגדיר φ_S על ידי חיבור עם הקוטב הדרומי $(0, -1)$, ואז

$$\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1 + y}$$

וההופכית היא

$$\varphi_S^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \right)$$

ביחד שתי אלה נותנות פרמטריזציה טובה לכל נקודה. באופן כללי, יש לנו $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. כעת הקוטב הצפוני $N = (0, \dots, 0, 1)$, $S = -N$, ההטלות הן

$$\varphi_N((x_i)_{i=1}^n) = \left(\frac{x_i}{1 - x_n} \right)_{i=1}^{n-1}$$

זו העתקה חד-חד-ערכית ועל, כמו קודם, וההופכית היא

$$\varphi_N^{-1} \left(\underbrace{(y_i)_{i=1}^{n-1}}_y \right) = \left(\frac{2y_1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right)$$

באופן אנלוגי נקבל את φ_S .