חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

3 באפריל 2017

1 מרחב משיק

הגדרה 1.1 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, ויהי $x \in M$. המרחב המשיק $T_x M \subseteq \mathbb{R}^n$ הוא אוסף כל אותם $v \in \mathbb{R}^n$ כך שקיימת מסילה $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ עם $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$.

יש גם את $x + T_x M$ - המרחב האפיני המשיק, שזה המרחב הלינארי המשיק מוזז בוקטור x.

1.1 תיאורים של המרחב המשיק

1. פרמטריזציה: נניח כי $M = r(G) \subseteq \mathbb{R}^n$, כאשר $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, כאשר $r : G \to M$ פרמטריזציה טובה (אין בעיה בהנחה הזו, כי אחרת נצטמצם לסביבה קטנה מספיק). נסמן

$$u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

יהי $\tilde{x} = r(\tilde{u}) \in M$. נרצה למצוא ביטוי עבור $T_{\tilde{x}} M$. תהי $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ עם $\gamma(0) = \tilde{u}$. נגדיר

$$\alpha(t) = r(\gamma(t))$$

מסילה בתוך M שעוברת בזמן 0 בנקודה $\tilde{x}$. לפי כלל השרשרת:

$$\alpha'(0) = r_{u_1}(\tilde{u}) \gamma_1'(0) + \cdots + r_{u_k}(\tilde{u}) \gamma_k'(0) = Dr(\tilde{u}) r'(0)$$

כעת, הנגזרות החלקיות של r בנקודה $\tilde{u}$ בלתי תלויות לינארית, כי הפרמטריזציה רגולרית. אם כן,

$$T_{\tilde{x}} M = \operatorname{span}(r_{u_i}(\tilde{u}))$$

דוגמא ניקח גליל:

$$M = \left\{x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 \in [-1,1]\right\}$$

יש פרמטריזציה דו מימדית טובה מקומית:

$$r(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$$

אם $x \in M$, נסמן $x = (x_1, x_2, x_3)$, וכן $x = r(\theta, t)$. אזי

$$T_x M = \operatorname{span}\left\{r_\theta(\theta,t), r_t(\theta,t)\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. הצגה סתומה: נדון במקרה בו $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ממימד $n-1$, כי זה המקרה הנפוץ וקל להכליל. נניח כי $M = \{x \mid F(x) = 0\}$, כאשר $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. יהי $\tilde{x} \in M$ אשר F רגולרית בו. תהי $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ מסילה שעוברת דרך $\tilde{x}$ בזמן $t = 0$. מההגדרה, לכל $-\varepsilon < t < \varepsilon$, מתקיים

$$F(\alpha(t)) = 0$$

נגזור:

$$\begin{aligned} F_{x_1}(\tilde{x})\,\alpha_1'(0) + \cdots + F_{x_n}(\tilde{x})\,\alpha_n'(0) &= 0 \\ \nabla F(\tilde{x})\,\alpha'(0) &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו כי $T_{\tilde{x}} M = \nabla F(\tilde{x})^\perp$. המרחב האפיני המשיק הוא קבוצת אותם x המקיימים

$$(x - x_0)\,\nabla F(\tilde{x}) = 0$$

במקרה k מימדי כללי, יש $n-k$ העתקות שמהוות הצגה סתומה טובה, ואז המרחב המשיק הוא המרחב הניצב לכל הגרדיאנטים שלהן בנקודה $\tilde{x}$.

תרגיל נסמן $S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$, ספירה בתוך $\mathbb{R}^3$. חשבו את המרחק $\rho(x_0, y_0, z_0)$ מהראשית למישור האפיני המשיק לספירה בנקודה (x_0, y_0, z_0).

פתרון $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ואז $S^2 = \{F = 0\}$. הגרדיאנט הוא

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0)$$

אז המרחב האפיני המשיק הוא אותן נקודות (x,y,z) שמקיימות

$$\begin{aligned} (x - x_0, y - y_0, z - z_0)(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ x x_0 + y y_0 + z z_0 &= 1 \\ \rho(x_0, y_0, z_0) &= 1 \end{aligned}$$