אלגברה ב3

ארזים ©

8 בדצמבר 2016

1 אידאלים בחוג שברים

בשיעור שעבר ראינו שבחוג $S^{-1}R$, עבור $S \subseteq R$ כפלית עם ההומומורפיזם $f(r) = \frac{r}{1}$, כל אידאל הוא מהצורה $S^{-1}I$ עבור I אידאל של R.

טענה 1.1 $S^{-1}I = S^{-1}R$ אם ורק אם $I \cap S \neq 0$.

הוכחה: נניח כי $S^{-1}I = S^{-1}R$. מתקיים $\frac{1}{1} \in S^{-1}I$, כלומר יש $x \in I$ וגם $s \in S$ עבורם $\frac{x}{s} = \frac{1}{1}$, כלומר יש $z \in S$ עבורו

$$z(x-s) = 0$$
$$I \ni zx = zs \in S$$

ולכן החיתוך לא ריק.
נניח כי $s \in I \cap S$. אזי

$$\frac{1}{1} = \frac{s}{s} \in S^{-1}I$$

ולכן $S^{-1}I = S^{-1}R$. ■

נשים לב כי $S^{-1}I$ הוא האידל שנוצר על ידי התמונה $f(I)$.
יהי $I \subseteq R$ אידאל, ונניח כי $f^{-1}(J) = R$ עבור $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל. ראינו כי $J = S^{-1}I$.

$$I = f^{-1}(J) = f^{-1}\left(S^{-1}I\right) = \bigcup_{s \in S} (I:s)$$

I הוא איחוד של אידאלים שמכילים אותו, כלומר $(I:s) = I$ לכל $s \in S$. כלומר, נקבל כי לכל $x \in R$, $sx \in I$ אם ורק אם $x \in I$. בחוג R/I זה אומר

$$s(x+I) = I \iff x+I = I$$

לכן אין בחוג R/I איבר שאינו 0 שמתאפס על ידי כפל באיזשהו איבר $s \in S$.
להיפך, אם התנאי האחרון מתקיים, אז $(I:s) = I$ לכל $s \in S$, ולכן $I = f^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ - כלומר I תמונה הפוכה של אידאל מתוך $S^{-1}R$.

משפט 1.2 תהי $S\subseteq R$ קבוצה כפלית. יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של $S^{-1}R$ והאידאלים הראשוניים של R אשר זרים לקבוצה S. ההתאמה היא

$$R\supseteq P\mapsto S^{-1}P$$
$$f^{-1}\left(Q\right)\hookleftarrow Q\subseteq S^{-1}R$$

הוכחה: יהי $Q\subseteq S^{-1}R$ אידאל ראשוני. אזי $f^{-1}\left(Q\right)=P$ אידאל ראשוני של R (זאת עובדה כללית ־ תמונה הפוכה של אידאל ראשוני תחת הומומורפיזם היא אידאל ראשוני).
ראינו כי $Q=S^{-1}P$, וכיוון שמתקיים $Q\subsetneq S^{-1}R$, נקבל כי $P\cap S=\emptyset$.

כעת יהי $P\subseteq R$ אידאל ראשוני שזר לקבוצה S. נראה כי $S^{-1}P$ אידאל ראשוני. נניח כי $\frac{x}{s}\cdot\frac{y}{t}\in S^{-1}P$ עבור $x,y\in R,s,t\in S$. לכן יש $a\in P$, $z\in S$ שעבורם

$$\frac{xy}{st}=\frac{a}{z}$$

לכן יש $u\in S$ כך שמתקיים

$$u\left(xyz-ast\right)=0$$
$$uxyz=uast\in P$$

P ראשוני, ולכן $xy\in P$ או $zu\in P$. $zu\in S$, ולכן $zu\notin P$, כי P זרה לקבוצה S, ולכן $xy\in P$. לכן $x\in P$ או $y\in P$, כלומר $\frac{x}{s}\in S^{-1}P$ או $\frac{y}{t}\in S^{-1}P$.

כעת, נניח כי $S^{-1}P_1=S^{-1}P_2$, כאשר $P_1,P_2\subseteq R$ אידאלים ראשוניים. אזי

$$f^{-1}\left(S^{-1}P_1\right)=f^{-1}\left(S^{-1}P_2\right)$$
$$\bigcup_{s\in S}\left(P_1:s\right)=\bigcup_{s\in S}\left(P_2:s\right)$$

כעת, אם $s\in S$, וכן $xs\in P_i$, אזי $s\notin P_i$, כלומר $x\in P_i$. לכן לכל $s\in S$ מתקיים

$$\left(P_I:s\right)=P_i$$

לכן נקבל

$$P_1=P_2$$

וההתאמה שלנו חד־חד־ערכית.

כעת, אם $f^{-1}\left(Q_1\right)=f^{-1}\left(Q_2\right)=P$, אזי $Q_1=S^{-1}P=Q_2$, ולכן ההעתקה חד־חד־ערכית ועל. ■

דוגמא יהי $R \supseteq P$ אידאל ראשוני ונקח $S = R \backslash P$. מסמנים $S^{-1}P = R_P$. יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של R_P והאידאלים הראשוניים של R שמוכלים בתוך P.
נניח כי $R \supseteq P \supseteq Q$ אידאל ראשוני של R. מסמנים $S^{-1}Q = Q_P$. אזי

$$R_P / Q_P \cong \left(R/Q\right)_P$$

זאת כמודולים מעל R_p. אלה הם גם חוגים, וקל לראות שאותו איזומורפיזם הוא גם איזומורפיזם של חוגים.
נרצה לדעת כיצד נראה אידאל ראשוני בחוג R_P/Q_P. אנחנו יודעים שיש להם את הצורה J/Q_P, כאשר $Q_P \subseteq J \subseteq R_P$ אידאל ראשוני. לכן יש אידאל ראשוני (יחיד) $L \subseteq R$ עבורו $L \subseteq P$, $J = L_P$.
נסמן, כמו קודם, $f(r) = \frac{r}{1}$. אזי אנחנו יודעים כי $L = f^{-1}(L_p) \supseteq f^{-1}(Q_P) = Q$. לכן למעשה $Q \subseteq L \subseteq P$.
אם ניקח $Q = P$, אז P_P הוא האידאל המקסימלי היחיד של R_P. לכן R_P/P_P הוא שדה, R/P הוא תחום שלמות, והשדה $\left(R/P\right)_P$ הוא שדה המנות של R/P.

טענה 1.3 תהי $S \subseteq R$ תת קבוצה כפלית. יהי $I \subseteq R$ אידאל. אזי

$$S^{-1}\left(\sqrt{I}\right) = \sqrt{S^{-1}I}$$

הוכחה: נניח כי $\frac{x}{s} \in S^{-1}\left(\sqrt{I}\right)$, כלומר $s \in S, x \in \sqrt{I}$. יהי n טבעי עבורו $x^n \in I$. אזי $\frac{x^n}{s^n} \in S^{-1}I$. לכן $\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$.
בכיוון השני, נניח כי $\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$, עבור $s \in S, x \in R$. יהי n טעי עבורו $\frac{x^n}{s^n} \in S^{-1}I$. אזי קיימים $a \in I, t \in S$ עבורם

$$\frac{x^n}{s^n} = \frac{a}{t}$$

לכן קיים $z \in S$ עבורו

$$\begin{aligned} z\left(tx^n - as^n\right) &= 0 \\ ztx^n &= zas^n \\ (tzx)^n &= a\,(zs)^n\,t^{n-1} \in I \end{aligned}$$

לכן $xzt \in \sqrt{I}$, כלומר $\frac{x}{1} \in S^{-1}\left(\sqrt{I}\right)$, כלומר $\frac{x}{s} \in S^{-1}\left(\sqrt{I}\right)$.
קיבלנו הכלה דו כיוונית ולכן שוויון. ■

מקרה פרטי: $I = 0$. נקבל

$$S^{-1}\left(n\left(R\right)\right) = n\left(S^{-1}R\right)$$

משפט 1.4 יהי $\varphi : R_1 \to R_2$ הומומורפיזם של חוגים. נתון אידאל ראשוני $P \subseteq R_1$. אזי יש אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ עבורו $\varphi^{-1}(Q)$ אם ורק אם

$$P = \varphi^{-1}(R_2\varphi(P))$$

הוכחה: הכיוון הפשוט מבין השניים הוא כללי. נניח כי $P = \varphi^{-1}(Q)$. אזי

$$\begin{aligned} \varphi(P) &\subseteq Q \\ R_2\varphi(P) &\subseteq Q \\ \varphi^{-1}(R_2\varphi(P)) &\subseteq \varphi^{-1}(Q) = P \end{aligned}$$

ההכלה השנייה תמיד נכונה, ולכן נקבל את השוויון שרצינו.
הכיוון השני אינו טריוויאלי, ונוכיח אותו בפעם הבאה. ■