אלגברה ב3

© ארזים

15 בדצמבר 2016

1 משפט הפירוק הראשון

את השיעור האחרון סיימנו במשפט היחידות הראשון לפירוק אידאלים לחיתוך של אידאלים פרימריים. נחזור על החלק האחרון: בהינתן פירוק מינימלי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

עם $\sqrt{Q_i} = P_i$, נראה שניתן לכתוב $P_i = \sqrt{(I:x)}$ עבור x כלשהו. לכל $1 \leq i \leq n$ נבחר

$$x_i \in \bigcap_{i \neq j} Q_j \backslash Q_i$$

ואז נקבל

$$(I : x_i) = \bigcap_{j=1}^{n} (Q_j : x_i) = (Q_i : x_i)$$

ולכן

$$\sqrt{(I : x_i)} = \sqrt{(Q_i : x_i)} = \sqrt{Q_i} = P_i$$

הגדרה 1.1 נניח כי $I \subseteq R$ אידאל פריק. האידאלים $P_1, \ldots, P_n$ בסימונים שלמעלה ייקראו האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל I. האידאלים המינימליים בקבוצה זו ייקראו האידאלים הראשוניים המינימליים השייכים לאידאל I.

דוגמא יהי $\mathbb{F}$ שדה, ונתבונן בחוג $R = \mathbb{F}[x, y]$. נגדיר את האידאל הבא:

$$I = Rx^2 + Rxy$$

הפירוק הפרימרי יהיה לפי

$$P_1 = Rx$$
$$P_2 = Rx + Ry$$

נראה כי

$$I = P_1 \cap P_2^2$$

נשים לב כי

$$R/P_1 = \mathbb{F}[x,y]/\mathbb{F}[x,y]x \cong \mathbb{F}[y]$$

זהו תחום שלמות, ולכן P_1 אידאל ראשוני.
P_2 הוא למעשה אידאל מקסימלי. נראה זאת לפי האפימורפיזם:

$$\begin{aligned} &F[x,y] \to F \\ &f(x,y) \mapsto f(0,0) \end{aligned}$$

הגרעין שלו הוא האידאל $\{f(x,y) \mid f(0,0)=0\}$. נכתוב פולינום כזה בתור

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i$$

ואז ברור כי $a_0(0)=0$, כלומר $x \mid a_0(x)$, ולכן

$$f(x,y) = \alpha_0(x) \cdot x + y \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{i-1} \in P_2$$

בתור גרעין של הומומורפיזם לשדה, P_2 מקסימלי (המנה בו היא שדה). לכן כל חזקה שלו היא אידאל פרימרי. כעת נראה את השוויון שטענו קודם.

$$\begin{aligned} &I \subseteq P_1 \\ &I \subseteq P_2^2 = Rx^2 + Rxy + Ry^2 \end{aligned}$$

להיפך, נניח כי

$$f(x,y) \in P_1 \cap P_2^2$$

אזי

$$xg(x,y) = f(x,y) = a(x,y)x^2 + b(x,y)xy + c(x,y)y^2$$

לכן מתקיים

$$c(x,y)y^2 \in Rx$$

כלומר

$$x \mid c(x,y)\, y^2$$
$$x \mid c(x,y)$$

נכתוב $c(x,y) = d(x,y)\, d$. כעת,

$$f(x,y) = a(x,y)\, x^2 + xy\,(b(x,y) + yd(x,y)) = a(x,y)\, x^2 + e(x,y)\, xy$$

ולכן קיבלנו את השוויון שרצינו. כעת

$$\sqrt{P_1} = P_1$$
$$\sqrt{P_2^2} = P_2 \neq P_1$$

וברור כי הם לא מוכלים זה בזה, ולכן קיבלנו פירוק מינימלי של I. האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל I הם P_1, P_2, וכן $P_1 \subseteq P_2$, לכן P_1 הוא האידאל הראשוני המינימלי היחיד ששייך לאידאל I.

טענה 1.2 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. בסימונים הקודמים, האידאלים הראשוניים המינימליים מבין האידאלים הראשוניים שמכילים את I הם בדיוק האידאלים הראשוניים המינימליים השייכים לאידאל I.

הוכחה: נניח כי $P \supseteq I = \bigcap Q_i$ אידאל ראשוני. אזי

$$P = \sqrt{P} \supseteq \sqrt{I} = \sqrt{\bigcap Q_i} = \bigcap \sqrt{Q_i} = \bigcap P_i$$

לכן יש j מסויים עבורו $P_j \subseteq P$. אם P_j מינימלי, יופי. אם לא, הוא מכיל אידאל ראשוני מינימלי ששייך לאידאל I, $P_{j'}$. לכן כל אידאל ראשוני שמכיל את I מכיל אידאל ראשוני מינימלי ששייך לאידאל I, וסיימנו. ■

נסמן לחוג R

$$D = \{x \in R \mid \exists 0 \neq y \in R. xy = 0\}$$

משפט 1.3 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. נניח כי $I = \bigcap Q_i$ פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $\sqrt{Q_i} = P_i$. אזי

$$\bigcup P_i = \{x \in R \mid (I : x) \neq I\}$$

מקרה פרטי: $I = \{0\}$,

$$\bigcup P_i = D$$

הוכחה: נתחיל בהוכחת המקרה הפרטי. נכתוב

$$\{0\} = \bigcap Q_i$$

פירוק מינימלי. כעת

$$(0:x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$$

לכן, כאשר $x \neq 0$, $(0:x) \neq 0$ אם ורק אם x מחלק אפס. לכן

$$D = \{x \in R \mid (0:x) \neq 0\}$$

כעת, נחשב ונראה כי

$$(0:x) = \left(\bigcap Q_i : x\right) = \bigcap (Q_i : x)$$
$$\sqrt{(0:x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} \sqrt{(Q_i : x)} = \bigcap_{x \notin Q_i} P_i$$

לכן מתקיים

$$\bigcup_{x \neq 0} \sqrt{(0:x)} \subseteq \bigcup P_i$$

כעת נניח כי $y \neq 0$ ששייך לאיחוד באגף שמאל. ישנו $x \neq 0$ וכן n טבעי כך שמתקיים $y^n x = 0$. נניח כי n מינימלי, ואז

$$y^{n-1} x \neq 0$$

ובכל זאת

$$y \cdot y^{n-1} x = 0$$

כלומר y מחלק אפס. להיפך, אם y מחלק 0, אז יש $x \neq 0$ עבורו $yx = 0$, ולכן $y \in (0:x) \subseteq \sqrt{(0:x)}$. בסך הכל,

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \sqrt{(0:x)}$$

לכן $D \subseteq \bigcup P_i$. להיפך, ראינו כי יש איבר x_i בחוג עבורו $\sqrt{(0:x_i)} = P_i$. לכן כל P_i משתתף באיחוד

$$\bigcup_{x \neq 0} \sqrt{(0:x)}$$

ולכן יש שוויון.
כדי לראות את המשפט הכללי, נעבור לחוגי מנה ונשתמש במקרה הפרטי. נכתוב

$$\overline{R} = R/I, \overline{Q_i} = Q_i/I, \overline{P_i} = P_i/I$$

כעת, $\overline{Q_i} \subseteq \overline{R}$ פרימרי, שכן

$$\overline{R}/\overline{Q_i} \cong R/Q_i$$

לפי משפט האיזומורפיזם השלישי. כעת,

$$\sqrt{\overline{Q_i}} = \sqrt{Q_i/I} = \sqrt{Q_i}/I = P_i/I = \overline{P_i}$$

לכן נקבל פירוק מינימלי של אידאל האפס:

$$\{0\} = \bigcap \overline{Q_i}$$

מהמקרה הפרטי,

$$\bigcup \overline{P_i} = \left\{x + I \in \overline{R} \mid \left(\overline{0} : x + I\right) \neq \overline{0}\right\}$$

ניקח תמונות הפוכות ונקבל

$$\bigcup P_i = \left\{x \in R \mid \left(\overline{0} : \overline{x}\right) \neq \overline{0}\right\}$$

נכתוב מפורשות את התנאי:

$$\begin{aligned}\left(\overline{0} : \overline{x}\right) &= \left\{a + I \in \overline{R} \mid (a + I)(x + I) = I\right\} = \\ &= \left\{a + I \in \overline{R} \mid ax \in I\right\} = (I : x)/I\end{aligned}$$

לכן

$$\left(\overline{0} : \overline{x}\right) \neq \overline{0} \iff (I : x) \neq I$$

ולכן קיבלנו את השוויון שרצינו. ■

2 לוקליזציות

תהי $R \supseteq S$ קבוצה כפלית, ויהי $R \supseteq Q$ אידאל פרימרי עם $P = \sqrt{Q}$. ראינו כי $S^{-1}Q = S^{-1}R$ אם ורק אם $Q \cap S \neq 0$, אבל זה שקול באופן כללי לכך שמתקיים $S \cap \sqrt{Q} \neq 0$. במקרה שבו זה לא מתקיים, נקבל בפעם הבאה שהאידאל $S^{-1}Q$ הוא אידאל פרימרי. ניזכר בהומומורפיזם $f(x) = \frac{x}{1}$, ואז

$$f^{-1}\left(S^{-1}Q\right) = \bigcup_{s \in S} (Q : s) = Q$$