אלגברה ב3

ארזים ©

29 בדצמבר 2016

1 הסגור השלם

משפט 1.1 נתונים חוגים $A \subseteq B$. התנאים הבאים שקולים עבור $b \in B$:

1. b שלם מעל A.
2. החוג $A\left[b\right]$ נוצר סופית כמודול מעל A.
3. קיים חוג $C \subseteq B$ אשר נוצר סופית כמודול מעל A ומכיל את b.
4. קיים מודול נאמן M מעל $A\left[b\right]$ שנוצר סופית מעל A.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: ראינו בשיעור שעבר.
$3 \Rightarrow 2$: ברור, כי ניקח $C = A\left[b\right]$.
$4 \Rightarrow 3$: ברור, כי ניקח $M = C$, שכן $b \in C$, וכן אם $\alpha \in A\left[b\right]$ עבורו $\alpha \cdot C = 0$, אז כיוון שמתקיים $1 \in C$, $0 = \alpha \cdot 1 = \alpha$. לכן זהו מודול נאמן, ונתון שהוא נוצר סופית מעל A.
$1 \Rightarrow 4$: נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\begin{gathered}\phi : M \to M \\ \phi\left(u\right) = bu\end{gathered}$$

כמובן שזהו הומומורפיזם של מודולים מעל A.

$$\phi\left(M\right) \subseteq M = A \cdot M$$

לפי משפט שראינו בתחילת הפרק על מודולים, ϕ מקיים משוואה מהצורה

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + a_1\phi + a_0 \cdot \mathrm{Id} = 0$$

עבור $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. מכאן,

$$\left(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0\right) M = 0$$

M מודול נאמן, ולכן נובע כי

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$$

ולכן b שלם מעל A. ■

מסקנה 1.2 נניח כי $B \subseteq A$ חוגים, ונניח כי $b_1, \ldots, b_n \in B$ שלמים מעל A. אזי החוג $A[b_1, \ldots, b_n]$ נוצר סופית כמודול מעל A.

הוכחה: באינדוקציה על n. כאשר $n = 1$, הטענה נובעת מהמשפט.
נניח כי הוכחנו כי $A' = A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$ נוצר סופית כמודול מעל A. ברור כי b_n שלם מעל A', ולכן $A'[b_n]$ נוצר סופית כמודול מעל A', ולכן $A'[b_n]$ נוצר סופית גם מעל A - כי A' נוצר סופית מעל A. ■

מסקנה 1.3 יהיו $B \subseteq A$ חוגים. קבוצת האיברים של B השלמים מעל A היא תת חוג של B.

הוכחה: נניח כי $x, y \in B$ שלמים מעל A. אזי החוג $C = A[x, y] \subseteq B$ נוצר סופית כמודול מעל A. $xy, x+y, x-y \in C$, ולכן מהתנאי השלישי במשפט, $xy, x+y, x-y$ כולם שלמים מעל A. ■

הגדרה 1.4 בהינתן $A \subseteq B$, קבוצת כל איברי B ששלמים מעל A נקראת <u>הסגור השלם</u> של A בתוך B.
אם הסגור השלם של A בתוך B הוא A, נאמר כי A <u>סגור בשלמות</u> בתוך B.
אם הסגור השלם של A בתוך B הוא B, נאמר כי B <u>שלם</u> מעל A.

דוגמא $\mathbb{Z}$ סגור בשלמות בתוך $\mathbb{Q}$.
נניח כי $\frac{m}{n}$ (עבור m, n שלמים זרים) שלם מעל $\mathbb{Z}$. אזי

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1} + \cdots + a_1\left(\frac{m}{n}\right) + a_0 = 0$$
$$m^k + a_{k-1}nm^{k-1} + \cdots + a_1 mn^{k-1} + a_0 n^k = 0$$

לכן נקבל

$$n \mid m^k$$

אבל הנחנו כי הם זרים ולכן $\frac{m}{n} = \pm m \in \mathbb{Z}$.

דוגמא אם ניקח את $\mathbb{Z}$ ונוסיף איברים ששלמים מעליו נקבל חוג ששלם מעל $\mathbb{Z}$, למשל $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, i\right]$

טענה 1.5 נתונים חוגים $A \subseteq B \subseteq C$ץ נניח כי C שלם מעל B וכי B שלם מעל Aץ אזי C שלם מעל A.

הוכחה: יהי $c\in C$. נניח כי

$$c^n+\sum_{i=0}^{n-1}b_ic^i=0$$

כאשר $b_i\in B$. נתבונן בחוג

$$B'=A\left[b_0,\ldots,b_{n-1}\right]$$

B' נוצר סופית כמודול מעל A שכן $b_0,\ldots,b_{n-1}$ שלמים מעל A. כמו כן, c שלם מעל B'. לכן החוג $B'\left[c\right]$ נוצר סופית כמודול מעל B', ולכן $B'\left[c\right]$ נותר סופית כמודול מעל A, וכמובן מכיל את c - ולכן c שלם מעל A. ■

מסקנה 1.6 הסגור השלם של A בתוך B הוא סגור בשלמות בתוך B.

טענה 1.7 נניח כי $A\subseteq B$ חוגים, כאשר B שלם מעל A.

1. יהי $J\subseteq B$ אידאל. נסמן $I=J\cap A$ (זה אידאל של A). נזהה את A/I כתת חוג של B/J. אזי B/J שלם מעל A/I.
2. תהי $S\subseteq A$ קבוצה כפלית. נראה את $S^{-1}A$ כתת חוג של $S^{-1}B$. אזי $S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$.

הוכחה:

1. ההומומורפיזם

$$\begin{aligned}A/I&\to B/J\\ a+I&\to a+J\end{aligned}$$

הוא חד־חד־ערכי, וזה הזיהוי שנרצה לעשות.
יהי $b\in B$. נניח כי

$$b^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ib^i=0$$

עבור $a_i\in A$. מכאן נקבל כי

$$\left(b+J\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\left(a_i+J\right)\left(b+J\right)^i$$

לכן $b+J$ שלם מעל A/J, כלומר B/J שלם מעל A/J.

2. יהי $s \in S$ (נשמור את הסימון של המשוואה המתוקנת אותה b מקיים מהסעיף הקודם).

$$\frac{b^n}{s^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{s} \cdot \frac{b^i}{s^i} = \frac{0}{s^n} = \frac{0}{1}$$

ולכן $\frac{b}{s}$ שלם מעל $S^{-1}A$, כלומר $S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$.

■

טענה 1.8 נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך B. תהי $S \subseteq A$ כפלית. אזי $S^{-1}C$ הוא הסגור השלם של $S^{-1}A$ בתוך $S^{-1}B$. בפרט, אם A סגור בשלמות בתוך B, אז גם $S^{-1}A$ סגור בשלמות בתוך $S^{-1}B$.

הוכחה: ראינו כי $S^{-1}C$ שלם מעל $S^{-1}A$. כעת, נניח כי $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$:

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{s_i} \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^i = \frac{0}{1}$$

נסמן

$$z = s_0 s_1 \cdots s_n \in S$$

נכפיל פי $(zs)^n$. נקבל

$$\frac{(zb)^n}{1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i z^{n-i} s^{n-i}}{s_i} \frac{(zb)^i}{1}$$

נוכל לצמצם את כל s_i מתוך החזקות של z במונים, ולקבל

$$\frac{(zb)^n}{1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1} \frac{(zb)^i}{1} = 0$$

לכן קיים $t \in S$ עבורו

$$t\left((zb)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (zb)^i\right) = 0$$

נכפיל פי t^{n-1}:

$$(ztb)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t (ztb)^i$$

לכן ztb שלם מעל A, כלומר $ztb \in C$. כמובן $zt \in S$. לכן $\frac{b}{1} \in S^{-1}C$, ולכן גם $\frac{b}{s}$. ■