אלגברה ב3

ⓒ ארזים

3 בנובמבר 2016

טענה 0.1 יהי R חוג. לכל אידאל $I \subsetneq R$ קיים אידאל מקסימלי המכיל את I. בפרט, יש בתוך R אידאל מקסימלי כלשהו (ניקח את המקרה הפרטי בו $I = 0$).

הוכחה: נסמן

$$S = \{J \subsetneq R \mid I \subseteq J \triangleleft R\}$$

S לא ריקה, שכן $I \in S$. תהי C שרשרת אידאלים מתוך S (ביחס להכלה). יהי

$$K = \bigcup_{j \in C} J$$

זהו אידאל (קל לבדוק, מתמשים בכך שהנחנו כי C שרשרת). כמו כן, $I \subseteq K$. בנוסף $1 \notin K$ (שכן $1 \notin J$ לכל $J \in S$), ולכן $K \subsetneq R$. K מכיל את כל איברי C (חסם מלעיל ביחס להכלה), ולכן מהלמה של צורן יש בקבוצה S איבר מקסימלי. נסמנו J. J הוא אידאל מקסימלי בחוג R, כי אם יש אידאל $J \subsetneq J' \subsetneq R$, אזי $J' \in S$, בסתירה למקסימליות J.■

מסקנה 0.2 נניח כי $a \in R$ איבר לא הפיך. אזי יש אידאל מקסימלי שמכיל את a - ניקח בטענה $I = (a) \subsetneq R$.

משפט 0.3 1. יהיו $P_1, \ldots, P_n \subseteq R$ אידאלים ראשוניים, ויהי $I \subseteq R$ אידאל כך שמתקיים

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

אזי יש $1 \leq k \leq n$ עבורו $I \subseteq P_k$.

2. יהיו $I_1, \ldots, I_n \subseteq R$ אידאלים, ויהי P אידאל ראשוני כך שמתקיים

$$P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$$

אזי יש $1 \leq k \leq n$ עבורו $P \supseteq I_k$.

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות נניח כי לכל $i \neq j$ מתקיים $P_j \not\subset P_i$. נבחר $a_{ij} \in P_i \backslash P_j$ לכל i, j. נגדיר, לכל j,

$$a_j = \prod_{j \neq i=1}^{n} a_{ij}$$

$a_{ij} \in P_i$ לכל $i \neq j$, ולכן $a_j \in P_i$ לכל $i \neq j$. כמו כן, $a_j \notin P_j$, שכן P_j ראשוני, אבל a_j מכפלה של איברים שאינם שייכים אליו. נניח בשלילה כי $I \not\subset P_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. נבחר $b_i \in I \backslash P_i$, לכל i. נסמן

$$I \ni c = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_j b_j + \sum_{j \neq i=1}^{n} a_i b_i$$

$a_j, b_j \notin P_j$, ולכן $a_j b_j \notin P_j$, כי הוא אידאל ראשוני. לעומת זאת המחובר השני (הסכום) כן נמצא בתוך P_j, כי $a_i \in P_j$ לכל $i \neq j$. נסיק כי $c \in I \backslash P_j$ לכל j - בסתירה לכך שמתקיים

$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} P_j$$

2. בשלילה, נניח כי $I_k \not\subset P$ לכל k. נבחר $a_k \in I_k \backslash P$ לכל k. לכן $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \notin P$, כי P ראשוני. מצד שני, מכפלה זו נמצאת בכל אחד מהאידאלים I_k, ולכן בחיתוך. קיבלנו סתירה לנתון

$$\bigcap_{j=1}^{n} I_j \subseteq P$$

■

הגדרה 0.4 יהי $I \subsetneq R$ אידאל. נגדיר את $\sqrt{I}$ (<u>הרדיקל</u> של I) בתור חיתוך כל אידאל הראשוניים המכילים את I. כמו כן, נגדיר $\sqrt{R} = R$. זהו אידאל, שכן הוא חיתוך של אידאלים.

משפט 0.5

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}. x^n \in I\}$$

הוכחה: אם $I=R$, המשפט ברור. נניח $I\subsetneq R$.
אם $x^n\in I$, אזי לכל P אידאל ראשוני שמכיל את I מתקיים $x^n\in P$, ולכן $x\in P$ ־ כי P ראשוני. לכן x נמצא בחיתוך כל האידאלים הראשוניים שמכילים את I, כלומר $x\in\sqrt{I}$.
כעת, יהי $x\in\sqrt{I}$, ונניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x^n\notin I$. נגדיר

$$S=\{I\subseteq J\lhd R\mid \forall n\in\mathbb{N}\ \ x^n\notin J\}$$

S לא ריקה, כי $I\in S$. נסדר אותה על ידי הכלה. קל לראות, מהלמה של צורן, שיש לה איבר מקסימלי (בדיוק כמו קודם ־ לכל שרשרת, איחוד איבריה הוא חסם מלעיל שלה), שנסמנו P. כמובן, $x\notin P$. נראה כי P אידאל ראשוני: נניח כי $a,b\notin P$. מכאן

$$P\subsetneq P+Ra,P+Rb$$

כיוון שלקחנו את P כאיבר מקסימלי מתוך S, חייב להתקיים $P+Ra,P+Rb\notin S$. לכן קיימים טבעיים m,n המקיימים $x^n\in P+Ra,x^m\in P+Rb$. מכאן,

$$x^{m+n}=(P+Ra)\,(P+Rb)\subseteq P+Rab$$

לכן, אם $ab\in P$, אזי $P+Rab=P$, ואז $x^{m+n}\in P$, בסתירה, כי $P\in S$. לכן $ab\notin P$, והוא אידאל ראשוני. בנוסף הוא מכיל את I, ולכן משתתף בחיתוך שמגדיר את $\sqrt{I}$. כלומר $\sqrt{I}\subseteq P$, לכן $x\in\sqrt{I}\subseteq P$, כלומר $x\in P$, בסתירה. ■

נתבונן במקרה הפרטי $I=0$. כעת נקבל כי $\sqrt{0}$ הוא חיתוך כל האידאלים הראשוניים בחוג, וכן הוא קבוצת כל האיברים הנילפוטנטיים.

הגדרה 0.6 יהי R חוג. <u>הרדיקל הנילי</u> של R מוגדר להיות

$$\mathcal{N}(R)=\sqrt{0}$$

טענה 0.7 יהיו $I,J\subseteq R$ אידאלים.

1. אם $I^n\subseteq J$ (n טבעי) אזי $\sqrt{I}\subseteq\sqrt{J}$.
2. $\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$
3. $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$
4. $\sqrt{I+J}=\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$
5. יהי P רדיקל ראשוני, אזי לכל n טבעי, $\sqrt{P^n}=P$.

הוכחה:

1. נניח כי $x\in\sqrt{I}$. לכן קיים m טבעי עבורו $x^m\in I$, ואז $x^{mn}\in I^n\subseteq J$, ומכאן $x\in\sqrt{J}$.

.2

$$\begin{aligned} IJ &\subseteq I \cap J \subseteq I, J \\ \sqrt{IJ} &\subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \end{aligned}$$

נניח כי $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, אזי קיימים m, n טבעיים עבורם $x^n \in I, x^m \in J$. לכן

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \in IJ$$

לכן נובע כי $x \in \sqrt{IJ}$, ולכן

$$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$$

ולכן כל ההכלות הן למעשה שוויונות.

3. ברור כי $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. נניח כי $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. יש n טבעי עבורו $x^n \in \sqrt{I}$, כלומר יש m טבעי עבורו $(x^n)^m = x^{nm} \in I$, לכן $x \in \sqrt{I}$.

4. ברור כי

$$\begin{aligned} I + J &\subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J} \\ \sqrt{I + j} &\subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned} \sqrt{I}, \sqrt{J} &\subseteq \sqrt{I + J} \\ \sqrt{I} + \sqrt{J} &\subseteq \sqrt{I + J} \\ \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} &\subseteq \sqrt{\sqrt{I + J}} = \sqrt{I + J} \end{aligned}$$

5. אם $x \in P$, אזי $x^n \in P^n$, ולכן $x \in \sqrt{P^n}$. לכן $P \subseteq \sqrt{P^n}$. כיוון שהנחנו כי P אידאל, $P^n \subseteq P$, ולכן $\sqrt{P^n} \subseteq \sqrt{P}$. נראה כי $\sqrt{P} = P$. אם $x^n \in P$ (n טבעי), אזי מראשוניות, $x \in P$, ולכן $\sqrt{P} \subseteq P$, ולכן $\sqrt{P} = P$ (ההכלה השנייה תמיד נכונה).

■