אלגברה ב3

© ארזים

23 בינואר 2017

1 גיאומטריה אלגברית

בהינתן $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית, הגדרנו

$$F[X] = F[x_1, \ldots, x_n] \big/ I(X)$$

לאידאל $I \subseteq X$ נגדיר

$$V_X I = \{a \in X \mid \forall f \in I \;\; f(a) = 0\}$$

ולקבוצה חלקית $Y \subseteq X$, נגדיר

$$I_X(Y) = \{\varphi \in F[x] \mid \varphi(Y) = 0\} \subseteq F[x]$$

וזהו אידאל. מקרה פרטי: $z \in X$, $Y = \{z\}$. נסמן

$$I_x\{z\} = M_z$$

זהו אידאל מקסימלי:

$$M_z = \{\varphi \in F[x] \mid \varphi(z) = 0\} = \ker(\varphi \to \varphi(z))$$

ההעתקה שבסוף היא אפימורפיזם לשדה. נסמן $\mathrm{Max}(F[x])$ את קבוצת האידאלים המקסימליים של $F[x]$.

טענה 1.1

1. ההתאמה $z \to M_z$, שמתאימה את איברי X לאיברי $\mathrm{Max}(F[x])$, היא חד־חד־ערכית ועל.
2. $z \in V_x(I)$ אם ורק אם $I \subseteq M_z$.
3. הקבוצות הסגורות בתוך X הן בדיוק כל הקבוצות מהצורה $V_X(I)$.

הוכחה:

1. ראינו כבר כי M_z אידאל מקסימלי לכל z. להיפך, נניח כי $J \subseteq F[x]$ אידאל מקסימלי. יש לו הצורה $J = J'/I(X)$, כאשר $I(X) \subseteq J'$ אידאל מקסימלי של $F[x_1, \ldots, x_n]$. לכן יש $z \in F^n$ כך שמתקיים

$$J' = I(\{z\})$$

כעת, $I(X) \subseteq I(\{z\})$, ולכן

$$\begin{aligned} \{z\} = V(I(\{z\})) \subseteq V(I(X)) = X \\ z \in X \end{aligned}$$

אם כן,

$$J = I(\{z\}) \big/ I(X) = M_z$$

לבסוף, אם $M_{z_1} = M_{z_2}$ עבור $z_1, z_2 \in X$, אזי

$$\begin{aligned} I(\{z_1\}) \big/ I(X) = I(\{z_2\}) \big/ I(X) \\ I(\{z_1\}) = I(\{z_2\}) \\ \{z_1\} = V(I(\{z_1\})) = V(I(\{z_2\})) = \{z_2\} \\ z_1 = z_2 \end{aligned}$$

2. $z \in V_X(I)$ אם ורק אם $f(z) = 0$ לכל $f \in I$, אם ורק אם $f \in M_z$ לכל $f \in I$, אם ורק אם $I \subseteq M_z$.

3. נניח כי $I \subseteq F[X]$. אזי

$$I = J \big/ I(X)$$

כאשר $J \supseteq I(X)$ אידאל של $F[x_1, \ldots, x_n]$. אזי

$$V_X(I) = \{a \in X \mid \forall f \in I \;\; f(a) = 0\} = \{a \in X \mid \forall \varphi \in J \;\; \varphi(a) = 0\} = X \cap V(J) = V(J)$$

להיפך, תהי $Y \subseteq X$ סגורה בתוך X (ולכן סגורה). נכתוב $Y = V(J)$, כאשר J אידאל רדיקלי של $F[x_1, \ldots, x_n]$. אזי

$$V(J) = Y \subseteq X$$

לכן $Y = X \cap V(J)$. כעת,

$$J = \sqrt{J} = I(V(J)) \supseteq I(X)$$

מכאן

$$Y = Y \cap X = X \cap V(J) = V_X\big(J/I(X)\big)$$

וזהו אידאל של $F[X]$.

■

טענה 1.2 באותם סימונים כמו קודם:

1. לכל אידאל $I \subseteq F[X]$ מתקיים

$$I_X(V_X(I)) = \sqrt{I}$$

2. לכל תת קבוצה $Y \subseteq X$ מתקיים

$$V_X(I_X(Y)) = \overline{Y}$$

נעיר שהסגור של Y בתוך X שווה לסגור של Y בתוך F^n.

הוכחה:

1. נכתוב $I = J/I(X)$, כאשר $I(X) \subseteq J \subseteq F[x_1, \ldots, x_n]$ אידאל. ראינו כי $V_X(I) = V(J)$. אזי

$$I_X(V_X(I)) = I_X(V(J)) = I(V(J))/I(X) = \sqrt{J}/I(X) = \sqrt{J/I(X)} = \sqrt{I}$$

2.

$$V_X(I_X(Y)) = V_X\big(I(Y)/I(X)\big) = X \cap V(I(Y)) = V(I(Y)) = \overline{Y}$$

■

מסקנה 1.3 ההתאמה $Y \mapsto I_X(Y)$ היא התאמה חד־חד־ערכית ועל מקבוצת הקבוצות הסגורות בתוך X לקבוצת האידאלים הרדיקליים באלגברה $F[X]$. ההתאמה ההפוכה היא

$$V_X(I) \leftarrow\!\shortmid I = \sqrt{I}$$

טענה 1.4 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית. אזי X אי פריקה אם ורק אם האלגברה $F[X]$ היא תחום שלמות.

הוכחה: X אי פריקה אם ורק אם $I(X)$ ראשוני, כלומר אם ורק אם $F[X] = F[x_1, \ldots, x_n] / I(X)$ תחום שלמות. ■

טענה 1.5 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית אי פריקה. תהי $\varphi \in F[X]$. נניח כי φ מתאפסת על קבוצה פתוחה $\emptyset \neq U \subseteq X$. אזי $\varphi = 0$.

הוכחה: לפי הנתון, $\varphi \in I_X(U)$. לכן

$$X \supseteq V_X(\varphi) \supseteq V(I_X(U)) = \overline{U} = X$$

השוויון האחרון מתקיים משום שנתון כי X אי פריקה, ולכן כל קבוצה פתוחה היא צפופה. מכאן,

$$V_X(\varphi) = X$$

כלומר, $\varphi(X) = 0$, היינו כלומר $\varphi = 0$. ■

1.1 מורפיזמים

הגדרה 1.6 תהיינה $X_1 \subseteq F^{n_1}$, $X_2 \subseteq F^{n_2}$ קבוצות אלגבריות. נאמר כי פונקציה $\varphi : X_1 \to X_2$ היא מורפיזם אם קיימים פולינומים

$$f_1(x), \ldots, f_{n_2}(x) \in F[x_1, \ldots, x_{n_1}]$$

כך שלכל $a \in X_1$ מתקיים

$$\varphi(a) = (f_1(a), \ldots, f_{n_2}(a))$$

כלומר, φ היא צמצום של הפונקציה $\varphi' : F^{n_1} \to F^{n_2}$ המוגדרת על ידי $\varphi'(a) = (f_1(a), \ldots, f_{n_2}(a))$.

φ שכזו מגדירה הומומורפיזם של אלגבראות

$$\varphi^* : F[x_2] \to F[X_1]$$

על ידי

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi$$

בסימונים שלעיל, מתקיים

$$g\circ\varphi\left(a\right)=g\left(\varphi\left(a\right)\right)=g\left(f_{1}\left(a\right),\ldots,f_{n_{2}}\left(a\right)\right)$$

נכתוב $g=\xi+I\left(X_{2}\right)$, ואז נקבל

$$g\circ\varphi\left(a\right)=\xi\left(f_{1}\left(a\right),\ldots,f_{n_{2}}\left(a\right)\right)\leftrightarrow\xi\left(f_{1}\left(a\right),\ldots,f_{n_{2}}\left(a\right)\right)+I\left(X_{2}\right)$$

משפט 1.7 יהי $\lambda:F\left[X_{2}\right]\to F\left[X_{1}\right]$ הומומורפיזם של אלגבראות מעל F. אזי יש מורפיזם יחיד $\varphi:X_{1}\to X_{2}$ כך שמתקיים $\lambda=\varphi^{*}$.

הוכחה: נסמן $\overline{t_{i}}=t_{i}+I\left(X_{2}\right)$, כאשר

$$F\left[x_{2}\right]=F\left[t_{1},\ldots,t_{n_{2}}\right]/I\left(X_{2}\right)$$

נסמן

$$\lambda\left(\overline{t_{i}}\right)=\varphi_{i}=f_{i}\left(x\right)+I\left(X_{1}\right)$$

כאשר

$$F\left[x_{1}\right]=F\left[x_{1},\ldots,x_{n_{1}}\right]/I\left(X_{1}\right)$$

נגדיר

$$\begin{aligned}\varphi' & :F^{n_{1}}\to F^{n_{2}}\\ \varphi'\left(a\right) & =\left(f_{1}\left(a\right),\ldots,f_{n_{2}}\left(a\right)\right)\end{aligned}$$

נראה כי לכל $a\in X_{1}$ מתקיים $\varphi'\left(a\right)\in X_{2}$. לשם כך, נראה כי לכל $\xi\in I\left(X_{2}\right)$ מתקיים

$$\xi\left(\varphi'\left(a\right)\right)=0$$

נחשב:

$$\xi\left(\varphi'\left(a\right)\right)=\xi\left(\varphi_{1}\left(a\right),\ldots,\varphi_{n_{2}}\left(a\right)\right)=\xi\left(\lambda\left(\overline{t_{1}}\right)\left(a\right),\ldots,\lambda\left(\overline{t_{n_{2}}}\right)\left(a\right)\right)$$

נוכל לכתוב

$$\xi\left(t\right)=\sum a_{i_{1},\ldots,i_{n_{2}}}t_{1}^{i_{1}}\cdots t_{n_{2}}^{i_{n_{2}}}$$

ואז

$$\overline{\xi}=\xi\left(t\right)+I\left(X_{2}\right)=\sum a_{i_{1},\ldots,i_{n_{2}}}\overline{t_{1}}^{n_{1}}\cdots\overline{t_{n_{2}}}^{i_{n_{2}}}=\overline{\xi}\left(\lambda\left(\overline{t_{1}}\right),\ldots,\lambda\left(\overline{t_{n_{2}}}\right)\right)=$$
$$=\sum a_{i_{1},\ldots,i_{n_{2}}}\varphi_{1}^{i_{1}}\cdots\varphi_{n_{2}}^{i_{2}}$$

לכן נקבל

$$\xi\left(\varphi'\left(a\right)\right)=\xi\left(\lambda\left(\overline{t_{1}}\right),\ldots,\lambda\left(\overline{t_{n_{2}}}\right)\right)=\lambda\left(\overline{\xi}\right)\left(a\right)=\lambda\left(0\right)\left(a\right)=0$$

נגדיר $\varphi=\varphi'\mid_{X_{1}}$, ולכן $\varphi:X_{1}\to X_{2}$. מהגדרת φ', ברור כי φ מורפיזם. מה שהראינו למעלה מראה כי עבור $g=\overline{\xi}\in F\left[x_{2}\right]$,

$$\lambda\left(g\right)=g\circ\varphi$$

כלומר $\lambda=\varphi^{*}$.
אם $\psi:X_{1}\to X_{2}$ כך שמתקיים $\varphi^{*}=\psi^{*}$, אזי

$$\varphi_{i}=\overline{t_{i}}\circ\varphi=\varphi^{*}\left(t_{i}\right)=\psi^{*}\left(t_{i}\right)=\overline{t_{i}}\circ\psi=\psi_{i}$$

כאשר

$$\psi\left(a\right)=\left(\psi_{1}\left(a\right),\ldots,\psi_{n_{2}}\left(a\right)\right)\in X_{2}\subseteq F^{n_{2}}$$

לכן נקבל כי

$$\varphi\left(a\right)=\psi\left(a\right)$$

לכל $a\in X_{1}$. ■

הערה 1.8 בעצם הראינו, במונחים קטגוריים שלא נרחיב עליהם כאן,

$$\mathrm{Mor}\left(X_{1},X_{2}\right)\cong\mathrm{Hom}_{F}\left(F\left[x_{2}\right],F\left[x_{1}\right]\right)$$

טענה 1.9 נניח כי $\varphi:X_{1}\to X_{2}$ מורפיזם. אזי φ רציף.

הוכחה: תהי $Y_{2}\subseteq X_{2}$ קבוצה סגורה. ראינו כי $Y_{2}=V\left(J_{2}\right)$ כאשר $I\left(X_{2}\right)\subseteq J_{2}\subseteq F\left[t_{1},\ldots,t_{n_{1}}\right]$.
כעת,

$$\varphi^{-1}\left(Y_{2}\right)=\left\{a\in X_{1}\mid\varphi\left(a\right)\in Y_{2}\right\}=\left\{a\in X_{1}\mid\forall\xi\in J_{2}\ \ \xi\left(f_{1}\left(a\right),\ldots,f_{n_{2}}\left(a\right)\right)=0\right\}$$

יהי $J_1 \subseteq F[x_1,\dots,x_{n_1}]$ האידאל הנוצר על ידי הפולינומים $\xi(f_1(x),\dots,f_{n_2}(x))$, כאשר $\xi \in J_2$. אזי נקבל

$$\varphi^{-1}(Y_2) = X_1 \cap V(J_1)$$

כלומר זו קבוצה סגורה, ולכן φ רציפה. ■

הערה 1.10 אם $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \xrightarrow{\psi} X_3$ מורפיזמים של קבוצות אלגבריות, אזי $\psi \circ \varphi : X_1 \to X_2$ מורפיזם, וכן

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

את זה קל לראות.

הגדרה 1.11 שתי קבוצות אלגבריות X_1, X_2 תקראנה איזומורפיות אם יש מורפיזמים

$$\begin{aligned}\varphi_1 &: X_1 \to X_2\\ \varphi_2 &: X_2 \to X_1\end{aligned}$$

כך שמתקיים

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1 &= \mathrm{id}_{X_1}\\ \varphi_1 \circ \varphi_2 &= \mathrm{id}_{X_2}\end{aligned}$$

זה כמובן שקול לכך שהאלגבראות המתאימות איזומורפיות:

$$\begin{aligned}\varphi_2^* \circ \varphi_1^* &= (\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \mathrm{id}_{X_2}^* = \mathrm{id}_{F[X_2]}\\ \varphi_1^* \circ \varphi_2^* &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \mathrm{id}_{X_1}^* = \mathrm{id}_{F[X_1]}\end{aligned}$$

דוגמא נניח כי $\mathrm{char} F = p$ (ראשוני). נתבונן בפונקציה

$$\begin{aligned}\varphi &: F \to F\\ \varphi(a) &= a^p\end{aligned}$$

φ חד־חד־ערכי ועל (אוטומורפיזם של שדות). כעת,

$$\varphi^*(F[x]) = F[x^p] \subsetneq F[x]$$

לכן φ^* אינו אוטומורפיזם של $F[x]$.

1.2 יריעות אפיניות

כאן נניח כי הקבוצות האלגבריות איתן אנחנו עובדים הן אי פריקות.

תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית אי פריקה. אנו יודעים כי $F[X]$ תחום שלמות. נסמן את שדה המנות בתור $F(X)$.

תהי $z \in X$. נסמן את הלוקליזציה של $F[X]$ באידאל המקסימלי M_z בתור

$$\mathcal{O}_z = F[X]_{M_z} \subseteq F(X)$$
$$\mathcal{O}_z = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in F[X], g(z) \neq 0 \right\}$$

זאת תת אלגברה מעל F של השדה $F(X)$ והיא מכילה את $F[X]$.

תהי $U \subseteq X$ תת קבוצה פתוחה בתוך X. נגדיר

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{z \in U} \mathcal{O}_z$$

זו גם תת אלגברה מעל F של $F(X)$, שמכילה את $F[X]$.

אנו נחשוב על איברי $\mathcal{O}_X(U)$ כפונקציות על U (עם ערכים בשדה F). נניח כי $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$. יהי $z \in U$. $\alpha \in \mathcal{O}_z$, כלומר אפשר להציג (בתוך $F(X)$):

$$\alpha = \frac{f}{g}$$

עבור $f, g \in F[X]$, $g(z) \neq 0$. נגדיר

$$\alpha(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

נוכיח שההגדרה טובה: אם $\alpha = \frac{f'}{g'}$ כאשר $f', g' \in F[X]$, $g'(z) \neq 0$, אזי

$$\alpha = \frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \in F(X)$$

לכן נקבל כי

$$fg' = gf'$$
$$f(z)\, g'(z) = f'(z)\, g(z)$$
$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

מותר לחלק שכן מתקיים $g(z), g'(z) \neq 0$.

צריך להראות גם כי אם $\alpha(z) = 0$ לכל $\alpha \in U$, אזי $\alpha = 0$. את זה נשאיר כתרגיל, ונגלה את התשובה בשיעור הבא.