אלגבראות

הגדרה יהי $f:R\to S$ הומו' של חוגים
זה משרה מבנה על S של מודול-R:

$$r\cdot s=f(r)\cdot s$$

נאמר ש-S הוא אלגברת-R.

באופן שקול, חוג S עם מבנה של מודול-R כך
ששני המבנים תואמים.
מגדיר הומו' $f:R\to S$

$$r\to r\cdot 1$$

לכל $s_1,s_2\in S$, $r\in R$. $s_2(r\cdot s_1)=r(s_1\cdot s_2)$

הומומורפיזם של אלגבראות-R: נאמר $\varphi:S_1\to S_2$
הוא הומומו' של אלגבראות-R אם הוא הומו'
של חוגים.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[rr, "\varphi"] & & S_2 \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

הערה: אם $R=K$ שדה ו-$S\neq 0$ אז $f:K\to S$
חייב להיות חח"ע, וניתן לזהות באופן טבעי
את K ו-$f(K)$ ע"י $x\cdot 1$ כ[illegible] x
לכן אלגברת-K זה חוג S שמכיל את K.

הערה: כל חוג הוא אלגברת-$\mathbb{Z}$ באופן יחיד,
כי יש הומומו' יחיד $\varphi:\mathbb{Z}\to R$

הערה: אם $f(x_1,\dots,x_n)$ הוא פולינום עם
מקדמים ב-R ו-S אלגברת-R. אז ניתן
להציב את f בנקודות $(x_1,\dots,x_n)\in S^n$
כלומר $f(x_1,\dots,x_n)\in S$ מוגדר.

הגדרות: יהי S אלגברה-R

נאמר ש S נ"ס מעל R, אם יש $x_1,\dots,x_n \in S$ כך שלכל $s\in S$ יש $f\in R[x_1,\dots,x_n]$ כך ש $s=f(x_1,\dots,x_n)$

נאמר ש-S סופית מעל R, אם S נ"ס כמודול R.

נאמר שחוג נ"ס, אם הוא נ"ס כאלגברת $\mathbb{Z}$.

<u>מכפלה טנזורית של אלגבראות:</u>

יהיו S_1, S_2 אלגבראות-R. התכונה האוניברסלית של המכפלה הטנזורית.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[rr, bend left, "h_1"] & T \arrow[r, dashed, "\exists! u"] & \tilde{T} \\
R \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] & S_2 \arrow[u, "g_2"] \arrow[ur, "h_2"] &
\end{tikzcd}$$

<u>טענה:</u> אם יש מכפלה טנזורית היא יחידה, עד כדי איזומורפיזם יחיד.

<u>משפט:</u> קיימת מכפלה טנזורית של אלגבראות-R.

<u>הוכחה:</u> כמודול $T=S_1\otimes S_2$ מודול-R

$$(s_1, s_2, s_1', s_2') \longmapsto s_1 s_1' \otimes s_2 s_2'$$

היא בילינארית-R.

מגדירה $T\times T \to T$ שמוגדרת ע"י

$$(s_1\otimes s_2, s_1'\otimes s_2') \longrightarrow s_1 s_1' \otimes s_2 s_2'$$

ובאופן יותר כללי:

$$\left(\left(\sum_i s_{1_i} \otimes s_{2_i}\right), \sum_j s_{1_j}' \otimes s_{2_j}'\right) = \dots$$

$$\dots = \sum_{ij} s_{1_i} s'_{1_j} \otimes s_{2_i} s'_{2_j}$$

זה נותן מבנה של חוג על T עם יחידה $1\otimes 1$

ואיבר אפס $0\otimes 1 = 1\otimes 0 = 0\otimes 0$

<u>והעתקות:</u>

$$R \xrightarrow{f_1} S_1 \xrightarrow{g_1} T$$

מוגדרת ע"י $g_1(s)=s\otimes 1$ ומתקיים $g_1\circ f_1(r) = g_1(r\cdot 1) = r\otimes 1$

$= 1\otimes r = g_2\circ f_2(r)$

נראה את קיום התכונה האוניברסלית: נניח שיש $\tilde{T}$ כבדיאגרמה.

$u(s_1\otimes s_2) = u(s_1\otimes 1)\cdot u(1\otimes s_2) = u(g_1(s_1))\cdot u(g_2 s_2) =$

$= h_1(s_1)\cdot h_2(s_2)$

~~לכאורה~~ וזה מגדיר את u ביחידות כי $T=S_1\otimes_R S_2$ נוצרת ע"י איברים מהסוג הזה.

כדי להראות ש-u ~~מוגדר~~ ע"י ⊗ באמת מוגדר היטב: צ"ל לבדוק $(s_1,s_2)\longmapsto h_1(s_1)h_2$ היא בילינארית מעל R וזה ברור.

$$k[x]\otimes k[x] = k[z,w]$$ דוגמאות

$$\parallel$$

$$k[x]\otimes_k k[y]$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})\times\mathbb{Q}(\sqrt{2})\ ?$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$$

עבודה בכתב ב ______ (המקצוע) הכיתה ______ (התאריך)

השם ______ (המשפחה) ______ (הפרטי)

מודולים נ"ס מעל PID

בהקשר מטרתנו: A חוג ראשי, תחום (PID), להבין מודולים נ"ס מעל A

$F \cong A^n$ ו-n נקרא דרגה.

סוג אחד: מודולים חופשיים.

סימון $rk\,F = n$.

למה: אם F חופשי, כמודול-A, ואם $M \le F$ תת מודול, אז M חופשי, $rk\,M \le rank\,F$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $n = rk\,F$, נתחיל ב: $n=1$.

$F = A$ ואז M הוא ציקלי. ואז $M = (a)$ כי A הוא PID.

ואז או $a = 0$ ו-M חופשי מדרגה 0.

או ש $a \neq 0$ $(a) \cong A$ כמודולים,

$x \mapsto a \cdot x$

צעד האינדוקציה: $M \le A^n$

$$0 \to A^{n-1} \to A^n \xrightarrow[\text{הטלה}]{p} A \to 0$$

על הגורם האחרון.

נצמצם את הסדרה ל-M.

$$0 \to M \cap A^{n-1} \to M \xrightarrow{p|_M} p(M) \to 0$$

$P(M) \cong A$ או $P(M) = 0$

אם $P(M) = 0$, $M \le A^{n-1}$ וסיימנו מאינדוקציה.

אחרת אם $P(M) \cong A$ אז יודעים מאינדוקציה ש $M \cap A^{n-1} \cong A^m$

$m \le n-1$

לכן הסדרה נכונה $0 \to A^m \to M \to A \to 0$

(הערה: $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$)

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \overset{\text{לא גורר}}{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

כי זה לא נכון

למודול חופשי יש תכונה מיוחדת:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \\ N \arrow[r, "\beta"] & L \end{tikzcd}$$

אם יש העתקה α מ-F ל-L והעתקה β מ-N ל-L על, קיים $\gamma: F \to N$ כך ש-

$\alpha = \beta \circ \gamma$

אכן: אם $\{x_i\}$ בסיס של F נבחר $y_i \in N$ כך ש- $\beta(y_i) = \alpha(x_i)$

וזה אפשרי כי β על. ונגדיר $\gamma(x_i) = y_i$

וזה מוגדר לגמרי γ.

לפי התכונה הנ"ל עם $F = A$ נקבל $\gamma: A \to M$

כך ש- $id = p|_M \gamma$ אז $M = A^m \oplus \gamma(A) \overset{\gamma \text{ חח"ע}}{\cong} A^m \oplus A = A^{m+1}$

משל.

הסבר:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "id"] \arrow[dl, dashed] & \\ 0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] & M \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma"] & 0 \end{tikzcd}$$

$a = \gamma(b) \Leftarrow a \in \gamma(A)$, $p(a) = 0 \Leftarrow a \in \gamma(A) \cap A^m$

$. a = 0 \Leftarrow b = 0 \Leftarrow b = p(a) = p\gamma(b) \Leftarrow$

לכן $M = \langle A^m, \gamma(A) \rangle = A^m \oplus \gamma(A)$ משל.

הגדרה: מודול P שמקיים

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, "\exists"'] \\ N \arrow[r, two heads] & L \end{tikzcd}$$

נקרא מודול פרויקטיבי.

הערה: חופשי ⟸ פרויקטיבי.

ההפך לא נכון באופן כללי, כן נכון עבור PID.

הגדרה אם M הוא מודול-A, נגדיר את תת מודול **הפיתול** להיות $T(M)=T_A=$

$\{m\in M \mid \exists a\neq 0,\ am=0\}$

נאמר ש-M הוא מודול פיתול אם $TM=M$

נאמר ש-M הוא חסר פיתול אם $T(M)=\{0\}$

טענה 1 אם M חסר פיתול מעל PID, אז M חופשי.

טענה 2 $M=T(M)\oplus F$ עבור F חופשי.

M- מודול נוצר סופית מעל PID.

את F נקבע ביחידות.

הוכחת את 2 בהינתן 1.

$0\longrightarrow T(M)\longrightarrow M\longrightarrow M/T\longrightarrow 0$

M/T חסר פיתול, אם $\bar m\in T(M/T)$ אז

קיים $0\neq a\in A$ כך ש-$a\bar m=0$ $\Longleftrightarrow$ $am\in T$

$\Leftarrow$ קיים $b\neq 0$ כך ש- $bam=0$

אבל אנחנו בתחום, ולכן $ab\neq 0$ $\Leftarrow$ $m\in T$

ולכן $\bar m=0$.

מסקנה 1: M/T חופשי, ולכן פרויקטיבי

ולכן יש חתך $\gamma : M/T \to M$

(כלומר הומו' A – כך ש- $M/T \xrightarrow{\gamma} M \to M/T$

id

לכן $M = T(M) \oplus T/M$ מוכיח

קיים פירוק. ואז היה פירוק $M = T(M) \oplus F$

$\Rightarrow M/T \cong F$ כנדרש.

תרגיל 5 פרויקטיבים/אינג'קטיבים

הערה: $0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$

אז: התה"ש

א) יש $\varphi : N \to M$ כך ש $\beta \circ \gamma = id_N$

ב) $\psi : M \to L$ כך ש $\psi \circ \alpha = id_L$

ג) יש איזו' $f : M \to N \oplus L$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & N \oplus L \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

זה נקרא פיצול של

(A) $\underline{M}$ – A מודולים

תרגיל: יהי $P \in \underline{M}(A)$ התה"ש

א) $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ אפי-מורפיזם

יהי $f : P \to N$ הומו' אז יש $g : P \to M$

ש $\varphi \circ g = f$

בית הספר התיכון
שליד האוניברסיטה העברית
בירושלים

עבודה בכתב ב ________________ (המקצוע) ________________ (התאריך)

השם ________________ (המשפחה) (הפרטי) הכיתה ________

ד. $Hom_A(P,-)$ מדויק.

ג. $0\to M\to L\to P\to 0$ מדויקת אז מתפצלת.

3. $Q\in M(A)$ כך ש- $Q\oplus P\simeq A^k$ (נקרא פרויקטיבי)

פתרון

(ג) ⇐ (3):

נקח אפי' $A \xrightarrow{\varphi} P$, ונסמן $K=\ker\varphi$ אז

$0\to K\to A^r\to P\to 0$

מדויקת = מתפצלת ⇐ $K\oplus P=A^r$

(3) ⇐ (ד): נניח $P\oplus Q\cong A^r$

$Hom_A(P,-)\oplus Hom_A(Q,-)=Hom_A(P\oplus Q,-)=$
$=Hom_A(A^r,-)=(-)^{\times r}$

מדויק. ⇐

$Hom(Q,-)$ גם $Hom(P,-)$
מדויקים.

(ג) ⇐ (א)

$$\begin{array}{ccc} \exists : & & P \\ & \swarrow & \| \\ L & \twoheadrightarrow & P \end{array}$$

(ב) ⇐ (א): יהי סמ"ק ~~MA~~

$0\to K\to M\xrightarrow{\varphi} N\to 0$

נקח $Hom(P,-)$:

$0\to Hom(P,K)\to Hom(P,M)\xrightarrow{\varphi_0} Hom(P,N)\to 0$

$\varphi\circ g \longleftarrow f$

$$\exists\, g: P \to M : \varphi \circ g = f$$

אינג'קטיביות:

עבור $I \in \underline{M}(A)$ הת״ש:

א) לכל שיכון $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} N$
ולכל הומ' $\alpha: M \to I$ ו-$\beta: N \to I$ עם $\beta \circ \varphi = \alpha$

ב) $\mathrm{Hom}(-, I)$ מדויק.

ג) כל סמ״ק $0 \to I \to M \to N \to 0$ מתפצלת.

אינג'קטיבי

הערה: חופשי $\Rightarrow$ פרויקטיבי $\Rightarrow$ שטוח
$(M \otimes -)$ מדויק

שטוח $\not\Rightarrow$ פרויקטיבי: $\mathbb{Q}$ שטוח אך אינו פרויקטיבי.
כי $2\cdot : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ הוא על.

פרויקטיבי $\not\Rightarrow$ חופשי: $0 \times K$ (שדה), כ-$K \times K$ מודול.

משפט בייר: מודול I הוא אינג'קטיבי אמ״מ לכל
אידיאל $\mathfrak{a} \lhd A$ ולכל הומ' $\varphi: \mathfrak{a} \to I$
יש $\psi: A \to I$ כך ש-$\psi|_{\mathfrak{a}} = \varphi$.
"הוכחה": הלמה של צורן.

תרגיל: הראו ש- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ הם חבורות
אבליות אינג'קטיביות ושלכל $M \neq 0$ ב-$\underline{Ab}$,
$\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$

פתרון: לפי בייר, חבורה אבלית
היא אינג'קטיבית אמ״מ ניתן לחלק בה כל מספר
שלם (מלבד 0)

בשביל החלק השני: די להוכיח [illegible]

$M=\mathbb{Z}$; $1/n$; $M=\mathbb{Z}/n$

נקח $1 \to \frac{1}{n}$

הערה: יהי $A \xrightarrow{\varphi} B$ הומ' של חוגים, אזי יש 3 פונק'

$$\underline{M}(A)\to\underline{M}(B) \quad (1)$$
$$M\to M\otimes_A B$$
$$\underline{M}(B)\to\underline{M}(A) \quad (2)$$
$$M\longrightarrow M$$
$$\underline{M}(A)\to\underline{M}(B) \quad (3)$$
$$M\longrightarrow Hom_A(B,M)$$

$M\in\underline{M}(A)$, $N\in\underline{M}(B)$

מתקיים
$$Hom_A(N,M)\cong Hom_B(N,Hom_A(B,M))$$
$$(n\mapsto(\psi(n))(1)) \longleftarrow\!\shortmid \ \psi$$

מסקנה: לכל חוג R, ה-R-מודול $Hom_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ הוא אינג'קטיבי, ולכל R-מודול יש הומו' $\neq 0$ אליו.

$$Hom_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_R(-,Hom_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$$

מסקנה: לכל מודול M יש שיכון במודול אינג'קטיבי.

הוכחה: לכל $0\neq m\in M$ נקח $\varphi_m: M\to I_c$ כך ש-$\varphi_m(m)\neq 0$. וכעת נקח $\varphi=\prod\varphi_m$: $M\hookrightarrow\prod_{0\neq m\in M} I_c$

הערה: $\oplus, \times$ של אינג'קטיבים הוא אינג'קטיבי.

הגדרה: $(\ )^* : \underline{M}(A) \to M(A)$

$$M \longmapsto Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

טענה: זה מדויק בשלמות (נאמן למקור - משהו לא עובר למדויק אם לא היה מדויק במקור)

תזכורת: M נקרא מוצג סופית אם יש סדרה מדויקת $A^n \to A^k \to M \to 0$ עם $n,k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

תרגיל: אם M מוצג סופית, N כלשהו.

$$M \otimes N^* = Hom_A(M,N)^*$$

רמז: עבור $M=A$ ברור $N^* = N^*$. במקרה ~~הכללי~~ הכללי, מפעילים $Hom_A(-,N)$, $\otimes N^*$ על $A^n \to A^k \to M \to 0$ ומשווים.

תרגיל: M שטוח ומוצג סופית אז M פרויקטיבי.

הערה: אם A נתרי, נ"ס $\Leftarrow$ מ"ס.

פתרון: נניח $M' \to M \to M''$ מדויקת.

$$Hom(P,M') \to Hom(P,M) \to Hom(P,M'')$$

מדויק

$$\Updownarrow$$

$$Hom(P,M'')^* \to Hom(P,M)^* \to Hom(P,M')^*$$

מדויק.

בירושלים

(התאריך) (המקצוע)

השם ____________________ הכיתה __________

(המשפחה) (הפרטי)

$P\otimes(M'')^* \to P\otimes M^* \to P\otimes(M')^*$ $\iff$

מדויק

$\Updownarrow$

$(M'')^* \to M^* \to (M')^*$

מדויק

$\Updownarrow$

מדויקת $M' \to M \to M''$

הרצאה 12 (תחילת שבוע 7 25.11)

מודולים נ"ס מעל PID

A הוא PID, M מודול נ"ס. M חסר פיתול

$$\underbrace{\{m : \exists a\neq 0 \text{ s.t. } am=0\}}_{T(M)} = 0$$

<u>למה 1</u> מודול נ"ס חסר פיתול איזומורפי לתת מודול של חופשי (עוד לא הוכחנו)

<u>למה 2</u> אם M נ"ס אז $M \cong T(M)\oplus M/T$ חופשי. (הוכחנו את 2 בהינתן 1)

<u>הוכחת למה 1</u> $M = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$

נקח תת קבוצה של $\{x_1,\dots,x_n\}$ מקסימלית ביחס לתכונה שהיא בת"ל מעל A. בה"כ ע"י שינוי סדר ניתן להניח שהקבוצה היא $\{x_1,\dots,x_k\}$ $k\le n$

נסמן $M \supseteq N = \sum_{i=1}^{k} x_i A$

$N \cong A^k$ כי ההעתקה $A^k \to N$, $e_i \to x_i$ חח"ע ועל.

לכל $i>k$ יש $0\neq a_i$ כך ש $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j + a_i x_i = 0$

נסמן $0\neq a = \prod_{i=k+1}^{n} a_i$ אז $ax_{k+1},\dots,ax_n \in N$ כך

$$M \supseteq N \supseteq aM$$

כיוון ש-M חסר פיתול $m_a : M \to aM$, $m \mapsto am$ חח"ע

לכן $aM \cong M$ כנדרש.

<u>סיכום:</u> לכל מודול נ"ס יש פירוק יחיד $M = T\oplus F$ F חופשי ו-T מודול פיתול.

נעבור למודולי פיתול נ"ס מעל A (תזכורת: A הוא PID)

נרצה לפרק את T לסכום ישר של מודולי פיתול - p.

בית הספר התיכון
שליד האוניברסיטה העברית
בירושלים

עבודה בכתב ב ______ (המקצוע) ______ (התאריך)

השם ______ (המשפחה) ______ (הפרטי) הכיתה ______

הגדרה - יהי T מודול על A ו- $p \in A$ איבר ראשוני.
נאמר ש- T הוא מודול פיתול p אם $\forall t \in T$
קיים n טבעי כך ש $p^n t = 0$. באופן כללי, בהינתן מודול
T נסמן $T_p = \{t \in T : \exists n \text{ טבעי } p^n t = 0\}$. בהינתן $t \in T$ נאמר
ש-

$\text{ord}(t) = (a)$ אם $\text{ann}(t) = \{b : bt = 0\} = (a) \subseteq A$

ואז סדרה של מודולים: $0 \to \text{ord}(t) \to A \to At \to 0$
$a \mapsto at$

אז: $At \cong A/\text{ord}\,t$. אם $t \in T_p$ אז $\text{ord}(t) = (p^n)$
עבור אפשרי $n \geq 0$. למשל n הוא המינימלי כך ש- $p^n t = 0$.

משפט: לכל מודול פיתול T:
$$T = \bigoplus_{p} T_p$$
p ראשוני של A
באחריות עד כדי חברות.

נקח $t \in T$ יש $d \neq 0$ כך ש $dt = 0$
נפרק $d = \prod p_i^{n_i}$ נסמן $d_j = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i} = \frac{d}{p_j^{n_j}}$
אז $\gcd(d_1, d_2, \dots) = 1$
לכן $1 = \sum a_j d_j$ נכפיל ב- t. $t = \sum \underbrace{a_j d_j t}_{t_j}$
$p_j^{n_j}$
נראה ש- $t_j \in T_{p_j}$.
$$p_j^{n_j} t_j = a_j d \cdot t = 0$$
זה מוכיח ש- $T = \sum T_p$
כדי להוכיח שהסכום ישר: $T_p \cap \sum_{q \neq p} T_q = 0$

נ"ח ש"ש $t\in T_p \cap \sum_{q\neq p} T_q$

אז $p^n t=0$, $dt=0$

$d=\prod_j q_j^{n_j}$ $\cancel{d=\prod q_j}$

$q_j\neq p$

$1=ap^n+bd \Leftarrow \gcd(d,p)=1$

$t=ap^nt+bdt=0$ סתירה.

הערה: זה מספיק על משפט השאריות הסיני: CRT

$$At \cong A/(d) \cong \bigoplus A/(p_j)^{n_j}$$

$(d)=ord(t)$, $d=\prod p_j^{n_j}$

הערה: נבחר ל-T (שנוצרה סופית) ($T=T_p$ נניח)

קבוצת יוצרים $\{t_1,\dots,t_n\}$ לכל i נקח e_i מינימלי

כך ש-$p^{e_i}t_i=0$ ונסמן $e=\max\{e_1,\dots,e_n\}$ אז

$p^e t_i=0$ לכל i $\Leftarrow$ $p^eT=0$

$p^{e-1}T\neq 0$ כלומר: יש $t\in T$

כך ש-$ord(t)=p^e$ וגם $p^e t=0$, (נסמן)

בסדרה המדויקת הקצרה $0\to At\to T\to \bar{T}=T/At\to 0$

למה: אם ל-$\bar{x}\in\bar{T}$ יש סדר $ord(\bar{x})=(p^f)$ אז

יש $x\in T$ שמעתיק את $\bar{x}$ כך ש-$ord(x)=(p^f)$

הערה: ברור ש-$f\le e$ $p^e T=0$

נבחר $z\in T$ כלשהו שמעתיק ל-$\bar{x}$. $\Leftarrow$ $zp^f\in \ker\pi$

$p^f\bar{x}=0 \Leftarrow p^f z\in\ker\pi = At$

לכן $p^f z=at$. מכאן ש: $0=p^e z=p^{e-f}(p^f z)=p^{e-f}a t$

בית הספר התיכון
שליד האוניברסיטה העברית
בירושלים

עבודה בכתב ב ______ (המקצוע) ______ (התאריך)

השם ______ (המשפחה) ______ (הפרטי) הכיתה ______

⇐ $a=p^f\cdot b$. נסמן $x=z-bt$

נראה שתמונתו של x היא $\bar{x}$ כי: $t\in\ker$.

$$p^f\cdot x=p^f z-p^f\cdot b\cdot t=p^f z-at=0$$

⇐ הסדר של x מחלק את p^f. מצד שני

כיוון ש- $p^{f-1}x\neq e$ ⇐ $ord(x)=(p^f)$

משפט: אם T מודול פיתול-p נ"ס אז

$$T\cong A/(p_1^{e_1})\oplus\cdots\oplus A/(p_n^{e_n}).$$

כך ש- $0<e_1\le\cdots\le e_n$ ו- n,e_j נקבעים ביחידות ע"י T. n = מס' היוצרים המינימלי של T.

הוכחה: נקח קבוצת יוצרים $x_1,\dots,x_n$ של T עם n מינימלי. אם $n=1$, $T\cong A/(p^{e_1})$ ו- $e_1=ord(x_1)$ ואין מה להוכיח מעבר לזה.

באופן כללי ($n>1$) נקח e מינימלי כך ש- $p^eT=0$

נקח x_n כך ש- $ord(x_n)=p^e$ |

(כי: שוב סדר). $Ax_n=A/p^eA$

נסתכל על $0\to Ax_n\to T\to\bar{T}=T/Ax_n$ אז $\bar{T}$

נוצר ע"י $n-1$ גורמים ולא ע"י פחות. לכן מאינדוקציה

$\bar{T}\cong A/p^{e_1}\oplus\cdots\oplus A/p^{e_{n-1}}$ כאשר $0<e_1\le\cdots\le e_{n-1}$

ו- $e_i\le e$ כי $p^eT=0$ ולכן $p^e\bar{T}=0$

בסברה לפי הלמה הקודמת: אפשר להרים את היוצרים של $\bar{T}$ לאיברים α_j מאותו סדר ולכן $T\leftarrow\bar{T}$, $\alpha_j\leftarrow\bar{\alpha}_j$

ונקבל ש- $\ker$

$$T=\bar{T}\oplus Ax_n\cong\bar{T}\oplus A/p^eA$$ וקיבלנו פירוק