

סדרות חזרות

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

f_i - חזרה
 M_i - חזרה
 f_{i+1} - חזרה

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

נניח שסדרת חזרות חזרה (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

נניח שסדרת חזרות (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M'' & \xrightarrow{g} & M' & \xrightarrow{f} & M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M''' & \xrightarrow{h} & M'' & \xrightarrow{g} & M' & \xrightarrow{f} & M & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

$M'' = \text{Coker } f$
 $M''' = \text{Coker } g$

סדרת חזרות (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

סדרת חזרות (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

$$0 \rightarrow N_i \rightarrow M_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$$

אם הסדרת חזרות (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(M', N)$$

$\psi(\varphi) = \varphi \circ v$
 $\alpha(\varphi) = \varphi \circ u$

אם הסדרת חזרות (M_i, f_i) היא $\text{Im } f_i = \text{Ker } f_{i+1}$

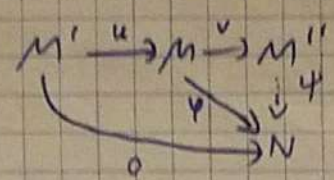
$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N') \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(M, N'')$$

$\alpha(\varphi) = \alpha \circ \varphi$
 $\beta(\varphi)$

$\ker \psi = \{v \in M' \mid \psi(v) = 0\}$
 $\psi(v) = 0 \iff v \in \ker \psi$
 $\psi(v) = 0 \iff v \in \ker \psi$

שאלה 1.1.1: $\ker \psi = \ker \psi \cap \ker \psi$

$\ker \psi = \ker \psi \cap \ker \psi$
 $\ker \psi = \ker \psi \cap \ker \psi$

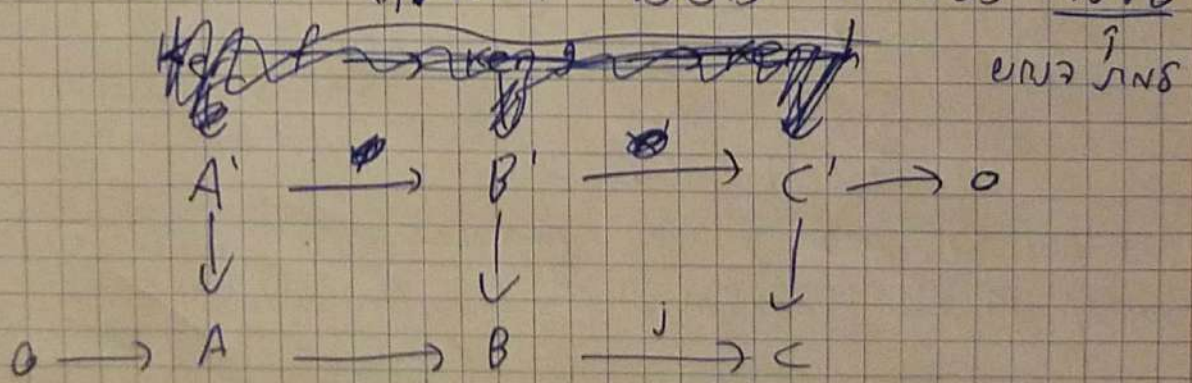


$N = M''$, $\psi = id$

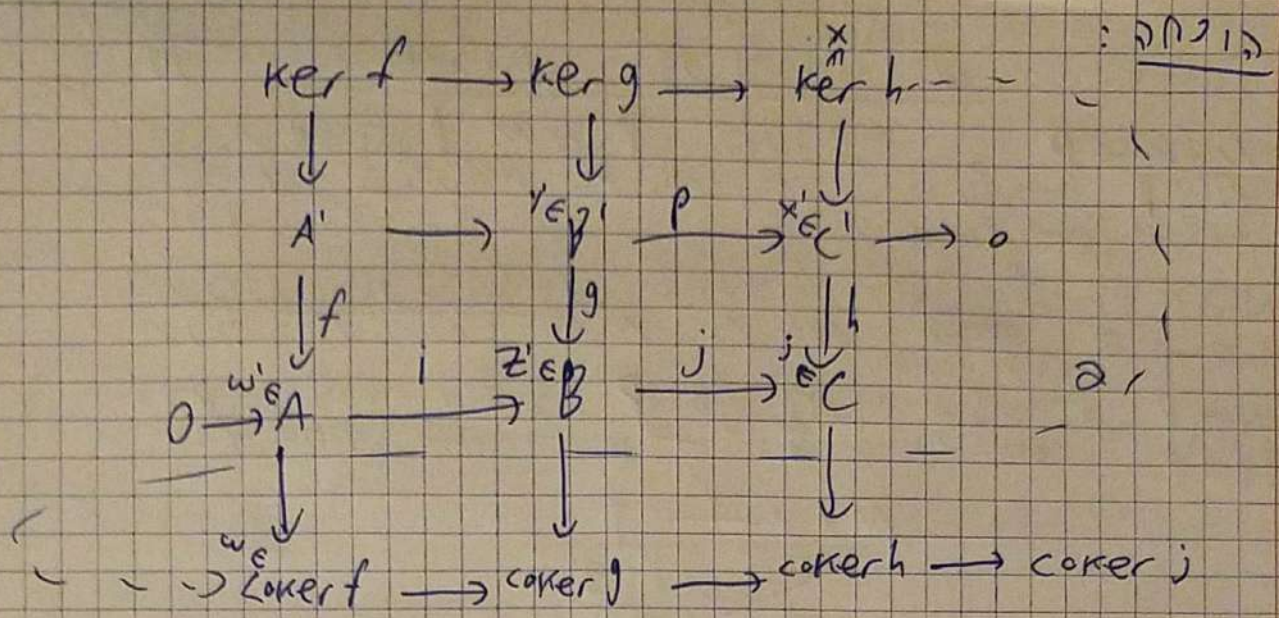
$\psi(u(x)) = \psi(0) \implies \psi(x) = 0 \implies x \in \ker \psi$
 $\ker \psi \subseteq \ker \psi$
 $\ker \psi \subseteq \ker \psi$

שאלה 1.1.2: $\ker \psi = \ker \psi$

$\text{Hom}(M, N) \cong N$ if $M = R$



$\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \rightarrow \text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h \rightarrow \text{coker } j$



$\ker f = \omega$
 $\omega' \in A$ or $\omega' \in \ker f$
 $\omega' \in \ker f$

$z' \in \text{Im}(i) \Leftrightarrow j(z') = 0$
 $h(x') = 0$
 Diagram Chasing

Diagram Chasing

"סניג'יה", R -מודול M של R -מודול N $e \in R$ -מודול M

$$\lambda: e \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\lambda)(m) \in \mathbb{Z}$$

נקרא λ -סדר λ R -מודול M של R -מודול N

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

$$\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(C)$$

$\lambda = \dim$ $\mathbb{C} = \dots$ $R = \mathbb{K}$

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N_i \rightarrow M_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$$

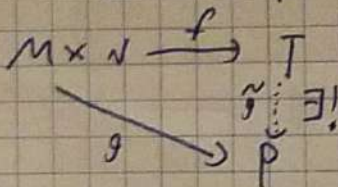
$$\lambda(M_i) - \lambda(M_{i+1}) + \lambda(M_{i+2}) = \lambda(N_i) - \lambda(N_{i+1}) - \lambda(N_{i+2}) + \lambda(N_{i+2}) + \lambda(N_{i+3}) = 0$$

מכפלות טנזוריות

$f: M \times N \rightarrow P$ פונקציה
 R סגור תחת f (כאשר M, N סגורים תחת f)
 R סגור תחת f (כאשר M, N סגורים תחת f)

מכונה אנומליה: נאמר ש- R סגור תחת f (כאשר M, N סגורים תחת f)
 $f: M \times N \rightarrow T$

כך ששם מוקדם P $g: T \rightarrow P$ $g \circ f = g$
 כך ששם מוקדם P $g: T \rightarrow P$ $g \circ f = g$



כדוגמה: $T = M \otimes N = M \otimes R^n$ נאמר ש- R סגור תחת f (כאשר M, N סגורים תחת f)

$$(m, n) \xrightarrow{f} m \otimes n$$

אנוני: ק"מ ת מכפלה טנזורית מוקדמי R .

בונתה: R מוקדם R חופשי עם בסיס $M \times N$,
 נאמר ש- R סגור תחת f (כאשר M, N סגורים תחת f)

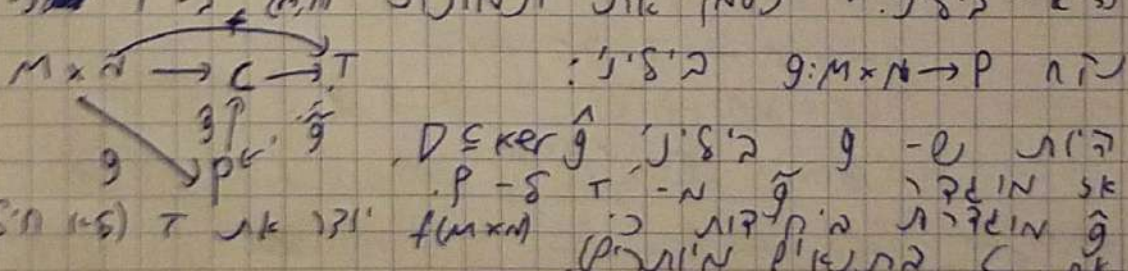
$$\sum_{(m,n) \in M \times N} a_{m,n} (m,n), \quad a_{m,n} \in R$$

נקח את P עביות תת-מוקדם הנגזר R ביוני

$$\begin{array}{l}
 m, m' \in M \\
 n, n' \in N \\
 a \in R
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 (m, n) + (m', n) - (m+m', n) \\
 (m, n) + (m, n') - (m, n+n') \\
 (am, n) - a(m, n) \\
 (m, an) - a(m, n)
 \end{array}
 \right.$$

היחסים שיש
 שמוקדם הנתיב
 עביות ביני

$f: M \times N \rightarrow C \rightarrow T$ כרוך $T \subseteq C$ P ביוני.



היות ש- P ביוני $D \subseteq \ker \hat{g}$ $P = T - N$ $f(M \times N)$

זימנה: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l}
 (x \otimes 0) = 0 \\
 (0 \otimes x) = 0 \\
 (1 \otimes 1) = 1 \\
 (1 \otimes 0) = 0 \\
 (0 \otimes 1) = 0 \\
 (1 \otimes 1) = 1
 \end{array}$$

$M \otimes N \ni x \otimes y = 0 \iff \exists x \in M, y \in N, x \otimes y = 0$ (כאן נ"ח)
 $M \otimes N \ni x \otimes y = 0 \iff \exists x \in M, y \in N, x \otimes y = 0$ (כאן נ"ח)

$M_0 \otimes N_0 \ni x \otimes y = 0$

$M \otimes N \ni 1 \otimes 2 = 0$ כי $N = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (כאן נ"ח)
 $N_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ כי $0 \neq 1 \otimes 2 \in M \otimes N_0$ כי $N = 2\mathbb{Z}$ (כאן נ"ח)

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$
 $M \otimes N \ni \sum x_i \otimes y_i = 0 \iff \exists y_i \in N, x_i \in M$ (כאן נ"ח)
 $M_0 \otimes N_0 \ni \sum x_i \otimes y_i = 0$ כי M_0, N_0 זוגי פרימיטיבי (כאן נ"ח)

בוכחה:
 יהיו $\sum x_i \otimes y_i = 0$ בגזר \mathbb{Z} (כאן נ"ח) ונניח $\sum (x_i, y_i) = D$ (כאן נ"ח)

$$\sum x_i \otimes y_i = 0 \implies \sum (x_i, y_i) = D \implies \sum (x_i, y_i) \in D$$

כאן D יהיה M שבו $\sum (x_i, y_i) \in D$ (כאן נ"ח)
 יהיה $\sum (x_i, y_i) \in D$ (כאן נ"ח) ונניח $\sum (x_i, y_i) \in D$ (כאן נ"ח)

בוכחה: $V_C = V \otimes_{\mathbb{R}} C$ (כאן נ"ח)
 $V_C = V \otimes_{\mathbb{R}} C$ (כאן נ"ח)

קלודן קומה $M \otimes N$ של $M \otimes N$ (כאן נ"ח)
 $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ (כאן נ"ח)

$$\begin{aligned} M \otimes N \otimes P &\rightarrow (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes (N \otimes P) \\ (M \otimes N) \otimes P &\rightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \\ R \otimes M &\rightarrow M \\ R' \otimes M &\rightarrow M' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \otimes N &\rightarrow M \otimes N \\ M \otimes N \otimes P &\rightarrow (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes (N \otimes P) \\ (M, N) \otimes P &\rightarrow (M \otimes P, N \otimes P) \end{aligned}$$

בוכחה: יהיה $M \otimes N$ (כאן נ"ח)

כאן $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ (כאן נ"ח)
 $M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ (כאן נ"ח)

$(\sum m_i \otimes n_i, z) \rightarrow \sum m_i \otimes n_i \otimes z$ (כאן נ"ח)
 $f: M \otimes N \rightarrow M \otimes N$ (כאן נ"ח)

R -סדרות M , S -סדרות P , P על R, S יו"ל
 S סדרות N ~~ל~~ $R \times S$ סדרות N
 $(r(sm) = s(rm))$ - R סדרות N

$s(m \otimes n) = m \otimes sn$: S -סדרות $M \otimes_R N$ SK

$$(M \otimes_R N) \otimes_S P \cong M \otimes_R (N \otimes_S P)$$

קונכר:

$$(m \otimes n) \otimes p \rightarrow m \otimes (n \otimes p)$$

טכונה נוספת:

$f: M \rightarrow M'$, $g: N \rightarrow N'$ הומומורפיזמים

$$f \otimes g: M \otimes N \rightarrow M' \otimes N'$$

$$m \otimes n \rightarrow f(m) \otimes g(n)$$

($f \otimes g$ סדרות $M \otimes N$ ו- $M' \otimes N'$)

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{f'} & M'' \\
 N & \xrightarrow{g} & N' & \xrightarrow{g'} & N''
 \end{array}$$

$$M \otimes N \xrightarrow{f \otimes g} M' \otimes N' \xrightarrow{f' \otimes g'} M'' \otimes N'' \quad : SK$$

$$(f' \otimes g') \otimes (f \otimes g)$$

כשרות, $f \otimes g$ סדרות $M \otimes N$ ו- $M' \otimes N'$

הרמה סדרות:

$$f: R \rightarrow S$$

S -סדרות N יו"ל R סדרות N SK מוסר f

$$rn = f(r)n$$

S הוא סדרות R .

S -סדרות N יו"ל R סדרות N SK מוסר f

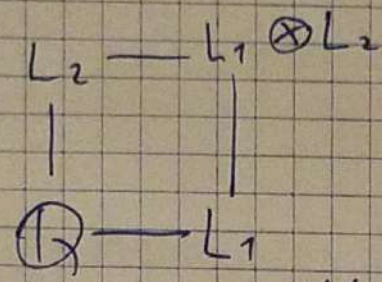
~~הרמה סדרות: $f: R \rightarrow S$ סדרות N יו"ל R סדרות N SK מוסר f~~

$N = \sum s_i y_i = \sum (\sum r_{ij} x_j) y_i = \sum r_{ij} x_j y_i$

הנ"ל נכון יהי עוק: הירחבת הסדרים.

אם מ נוקדם - R, אם הירחבת הסדרים שבו $M \otimes S$ (מוקדם-ס).

דוגמאות:



אם, $L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
 $L_1 \otimes L_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

אם L_1 הירחבה סופית, $L_2 = \mathbb{C}$, אם:

$[L_1: \mathbb{C}]$
 $L_1 \otimes L_2 = \mathbb{C}$

הערב: פה את מדרים עצמכמה אפילו יש שפגמו
 שרדיו הבראד הבניה

תוצאה: $L_1 \otimes L_2$ נחזק \Rightarrow ?