סדרות מדוייקות

סדרה:

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \dots$$

כאשר M_i מודול-R, f_i הומו-R.

סדרה סופית:

$$\dots 0 \to 0 \to 0 \to M_1 \to M_2 \to \dots \to M_n \to 0 \to 0 \to 0 \to \dots$$

נאמר שסדרה מדוייקת במקום ה-i (או ב: M_i), אם $\mathrm{Im}\, f_i = \ker f_{i+1}$.

נאמר שסדרה מדוייקת אם היא מדוייקת במקום ה-i לכל i.

- הסדרה $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ מדוייקת אמ"מ f חח"ע.
- הסדרה $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ מדוייקת אמ"מ g על.
- הסדרה $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ מדוייקת אמ"מ f חח"ע, g על, ו- g משרה איזו $M'' \cong \mathrm{coker}\, f = M/\mathrm{Im}\, f$

סדרה מדוייקת מהסוג האחרון נקראת סדרה מדוייקת קצרה.

- כל סדרה מדוייקת אפשר לפרק לסדרות מדוייקות קצרות: נסמן $N_i = \mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$

$$0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$$

טענה:

1) תהי $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ סדרה של מודולי-R.
אז הסדרה מדוייקת $\Leftrightarrow$ לכל מודול-R, N, הסדרה

$$0 \to \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Hom}(M', N)$$

מדוייקת, כאשר:

$$\bar{v}(\varphi) = \varphi \circ v$$
$$\bar{u}(\psi) = \psi \circ u$$

2) הסדרה $0 \to N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N''$ מדוייקת $\Leftrightarrow$ לכל מודול-R M. הסדרה

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{\beta}} \mathrm{Hom}(M, N'')$$

מדוייקת, כאשר:

$$\bar{\alpha}(\varphi) = \alpha \circ \varphi$$
$$\bar{\beta}(\psi)$$

הוכחה: יש המון טענות להוכיח.
לדוגמה: נניח כי v על. צ"ל $\bar{v}$ חח"ע. ואכן:

$$\bar{v}\varphi=0 \iff \forall x\in M.\ \varphi(v(x))=0 \iff \forall y\in M''.\ \varphi(y)=0 \iff \varphi=0$$

כי v על

דוגמה נוספת לטענה שיש להוכיח:

נניח $\mathrm{Im}(\bar{v})=\ker(\bar{u})$, רוצים להוכיח $\mathrm{Im}(u)=\ker v$.

~~[illegible]~~ $M''\xleftarrow{v}M\xleftarrow{u}M'$ - לכל N ולכל $M''\to M$ מתקיים:

$$\begin{tikzcd}
M'' \arrow[d, dashed, "\psi"] & M \arrow[l, "v"'] \arrow[dl, "\varphi"'] & M' \arrow[l, "u"'] \arrow[dll, bend left, "0"] \\
N & &
\end{tikzcd}$$

~~[illegible]~~ נקח $N=M''$, $\psi=id$

~~$\psi(u(x))=\psi(0)\Rightarrow\varphi(x)=0\Rightarrow x\in\mathrm{Im}(u)$~~ ~~[illegible]~~

אז כל איבר ב-M' עובר ל-0. לכן: $\mathrm{Im}\,\bar{v}\subseteq\ker\bar{u}\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,u\subseteq\ker v$. בכיוון השני: נקח $x\in\ker v$ ונקח $N=M/\mathrm{Im}(u)$

ו- $M\to M:\varphi$ ההטלה ומההנחה ק"מת $\psi:M''\to N$ כך ש:

$$\psi(v(x))=\psi(0)\Rightarrow\varphi(x)=0\Rightarrow x\in\mathrm{Im}(u)$$

שאר הטענות מושארות כתרגיל.

ב׳ - ② אם לוקחים $M=R$ אז יש $\mathrm{Hom}(M,N)\cong N$ ע״י $\varphi\mapsto\varphi(1)$, ותחת זיהוי זה $\bar{\alpha}\sim\alpha$, לכן סדרת ההומו׳ מדוייקת $\Rightarrow$ סדרת המודולים מדוייקת.

טענה: נניח כי נתונה דיאגרמה חילופית:

למת הנחש

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] & C &
\end{tikzcd}$$

עם סדרות מדוייקות.
אז יש סדרה מדוייקת ארוכה:

$$\ker f\to\ker g\to\ker h\to\mathrm{coker}\,f\to\mathrm{coker}\,g\to\mathrm{coker}\,h\to\mathrm{coker}\,j$$

<u>הוכחה:</u>

$$\begin{tikzcd}
 & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker g \arrow[r] \arrow[d] & \overset{x}{\ker h} \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left, "\partial"] & \\
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & y'\in B' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & x'\in C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & w'\in A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & z'\in B \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \in C \arrow[d] & \\
 & w\in \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} g \arrow[r] & \operatorname{coker} h \arrow[r] & \operatorname{coker} j
\end{tikzcd}$$

ניקח $x\in \ker h$ ונגדיר את $\underline{\partial(x)=w}$

ע"י:

ניקח $y'\in B'$ כך ש- $p(y')=x'$. (x' כל התמונה של x ב- C') ממקומיות יש $w'\in A$

עם $i(w')=g(y')$! - w מוגדר מ- w' על $\operatorname{coker} f$.

כי $h(x')=0$ ומקומוטטיביות $j(z')=0 \Rightarrow z'\in \operatorname{Im}(i)$.

לא מוגדר היטב כי y' מוגדר עד כדי איבר מ- A'

ואז יש מוגדר עד כדי איבר מ- $f(A')$ ...

כל שאר הטענות נבדקות ע"י רדיפת תרשימים -

Diagram Chasing

בהינתן $\mathcal{C}\subseteq R\text{-Mod}$ מחלקה של מודולי- R, "פונקציה"

$$\lambda:\mathcal{C}\to\mathbb{Z}$$

$$(\lambda(M)\in\mathbb{Z})$$

נקרא ל- λ אדטיבית אם לכל סדרה מדוייקת קצרה

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

עם $A,B,C\in\mathcal{C}$, $\lambda(B)=\lambda(A)+\lambda(C)$

<u>דוגמא</u>: $R=k$ שדה $\mathcal{C}=$ מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $\lambda=\dim$.

<u>טענה</u>: אם הסדרה

$$0\to M_0\to M_1\to\dots\to M_n\to 0$$

<u>מדוייקת</u>, $\sum(-1)^i\lambda(M_i)=0$ (עבור $M_0,\dots,M_n\in\mathcal{C}$, כאשר כל הגרעינים ב- $\mathcal{C}$).

<u>הוכחה</u>: $N_i:=\ker f_i$ אז הסדרה: $0\to N_i\to M_i\to N_{i+1}\to 0$

מדויקת ולכן $\lambda(M_i)=\lambda(N_i)+\lambda(N_{i+1})$. אז:

$$\lambda(M_0)-\lambda(M_1)+\lambda(M_2)-\dots=\lambda(N_1)-\lambda(N_1)-\lambda(N_2)+\lambda(N_2)+\lambda(N_3)-\dots=0$$

מכפלות טנזוריות

בהינתן R-מודולים M, N, P פונקציה $f: M\times N \to P$ נקראת בי-לינארית, אם לכל m, $n \mapsto f(m,n)$ R-לינארית, וכן לכל n, $m \mapsto f(m,n)$ R-לינארית.

תכונה אוניברסלית: נאמר שמודול-R T הוא מכפלה טנזורית של M, N אם יש העתקה בי-לינ' $f: M\times N \to T$ כך שלכל מודול P עם העתקה בי-לינארית $g: M\times N \to P$ קיים ויחיד הומו' $\tilde{g}: T \to P$ כך ש- $\tilde{g} f = g$.

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists!\tilde{g}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

כרגיל, זה מגדיר את T ביחידות ונשאר להראות קיום.
בד"כ נסמן $T = M\otimes N = M\otimes_R N$, ואת f נסמן כך:

$$(m,n) \xmapsto{f} m\otimes n$$

טענה: קיימת מכפלה טנזורית במודולי R.

הוכחה: יהי C מודול R חופשי על בסיס $M\times N$, כלומר איברי C הם מהצורה:

$$\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{m,n}(m,n) \quad , \quad a_{m,n}\in R \text{ — סכום סופי.}$$

ניקח את D להיות תת-מודול הנוצר ע"י ביטויים מהצורה:

$$m,m'\in M,\ n,n'\in N,\ a\in R \quad \begin{cases} (m,n)+(m',n)-(m+m',n) \\ (m,n)+(m,n')-(m,n+n') \\ (am,n)-a(m,n) \\ (m,an)-a(m,n) \end{cases}$$

← היחסים שיגרמו למודול המנה להיות בי-לינ'

נסמן: $T = C/D$. ברור ש- $f: M\times N \to C \to T$ היא בי-לינ'. נסמן את תמונת (m,n) ב- T ב- $m\otimes n$.

ניקח $g: M\times N \to P$ בי-לינ':

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\hat{g}"] & T \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

היות ש- g בי-לינ', $D \subseteq \ker \hat{g}$, אז מוגדר $\tilde{g}$ מ- T ל- P.
$\tilde{g}$ מוגדרת ביחידות כי $f(M\times N)$ יוצר את T (כי הוא יוצר את C בתנאים מיותרים).

דוגמה: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ מודולי $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ נוצר ע"י: $1\otimes 1$, $\underset{0}{0\otimes 0}$, $\underset{0}{0\otimes 1}$, $\underset{0}{1\otimes 0}$. אכן:

$(x\otimes 0) = 0(x\otimes 0) = 0$

$(0\otimes x) = 0(0\otimes x) = 0$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle 1\otimes 1\rangle$$

$2(1\otimes 1) = 2\otimes 1 = 0\otimes 1 = 0$

לכן: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \in \{0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ אבל זה לא 0, כי יש העתקה בי-לינ' $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $(1,1) \mapsto 1$ וכו' זה.

הערה: $(x,y)\in M\times N$ כך ש- $x\otimes y=0$ ב $M\otimes N$.
נניח כי $x\in M_0\subseteq M$, $y\in N_0\subseteq N$. אז לא בהכרח: $x\otimes y=0$ ב- $M_0\otimes N_0$.

דוגמה: $M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. ראינו כי $1\otimes 2=0$ ב $M\otimes N$.
אבל אם ניקח $N_0=2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, אז $0\neq 1\otimes 2\in M\otimes N_0$ (כי $N_0\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ו- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\neq 0$)

טענה: יהיו $x_i\in M$, $y_i\in N$ כך ש: $M\otimes N\ni\sum x_i\otimes y_i=0$.
אז יש תת-מודולים נ"ס M_0, N_0 כך ש- $M_0\otimes N_0\ni\sum x_i\otimes y_i=0$.

הוכחה:
רעיון: נרצה להוסיף את היחסים הדרושים כדי לקבל $\sum x_i\otimes y_i=0$.
עפ"י סימוני הבנייה של המכפלה הטנזורית,
$$\sum x_i\otimes y_i=0 \implies \sum(x_i,y_i)=D \Rightarrow$$
$\sum(x_i,y_i)$ הוא צירוף של הביטויים שמרכיבים את D. ניקח את M_0 להיות המודול הנוצר ע"י כל ה-m_i המופיעים בביטויים הללו ואת N_0 בצורה דומה.
ואז: $\sum x_i\otimes y_i=0 \Longleftarrow \sum(x_i,y_i)\in D_0$.

דוגמה: אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, אז (ה)ו $\mathbb{R}$-
וגם $\mathbb{C}$ הוא $\mathbb{R}$-מודול. אז ניתן להתבונן ב:
$V_{\mathbb{C}}=V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

באופן דומה להגדרה של $M\otimes N$ היינו יכולים להגדיר $M_1\otimes\dots\otimes M_n$ כלומר $T\to M_1\otimes\dots\otimes M_n$, $f:M_1\times\dots\times M_n$ מולטי-לינארית עם תכונה אוניברסלית דומה, ובנייה דומה של T.

טענה: יהיו M,N,P מודולי-R. אז יש איזו' יחידים:
1. $M\otimes N\to N\otimes M$
2. $M\otimes N\otimes P\to(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes(N\otimes P)$
3. $(M\oplus N)\otimes P\to(M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$
4. $R\otimes M\to M$
5. $R^n\otimes M\to M^n$

המא"ים בהתאמה:
1. $m\otimes n\mapsto n\otimes m$
2. $m\otimes n\otimes p\mapsto(m\otimes n)\otimes p\mapsto m\otimes(n\otimes p)$
3. $(m,n)\otimes p\mapsto(m\otimes p, n\otimes p)$
4. $a\otimes m\mapsto am$

הוכחה: יחידות ה"ז מיידית. יש להוכיח שהם מוגדרים היטב:
1. כיוון ש- $M\times N\to N\otimes M$, $(m,n)\mapsto n\otimes m$ בילינ', לכן מוגדר $f:M\otimes N\to N\otimes M$. באופן דומה מוגדר $g:N\otimes M\to M\otimes N$. מהתכונה האוניברסלית, העתקות אלה הופכיות.
2. ניקח העתקה $(M\otimes N)\times P\to M\otimes N\otimes P$, $(\sum m_i\otimes n_i, z)\mapsto\sum m_i\otimes n_i\otimes z$. בילינ', ולכן $f:(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes N\otimes P$. ממשיכים בצורה דומה...
3-5. תרגילים.

טענה: יהיו R, S חוגים, P מודול-S, M מודול-R. N מודול [illegible] $R\times S$ (מודול R, וכן מודול S והפעולות מתחלפות - $(r(sn)=s(rn))$.

אז $M\otimes_R N$ מודול-S: $s(m\otimes n)=m\otimes sn$, ומתקיים:

$$(M\otimes_R N)\otimes_S P \cong M\otimes_R (N\otimes_S P)$$

הוכחה:

$(m\otimes n)\otimes p \to m\otimes(n\otimes p)$

וצריך לבדוק שבילינ' ומוגדר היטב.

תכונה נוספת:

יהיו $f: M\to M'$, $g: N\to N'$ הומו', מגדירים:

$$f\otimes g: M\otimes N \to M'\otimes N'$$
$$m\otimes n \longmapsto f(m)\otimes g(n)$$

(יש לבדוק שזה מוגדר היטב).

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$$
$$N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$$

אז:

$$\begin{tikzcd} M\otimes N \arrow[r, "f\otimes g"] \arrow[rr, bend right, "(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)"'] & M'\otimes N' \arrow[r, "f'\otimes g'"] & M''\otimes N'' \end{tikzcd}$$

כלומר, טנזור מתחלף עם הרכבה.

הרחבת סקלרים:

$f: R\to S$ הומו' חוגים, N מודול-S. אז מושרה על N מבנה של מודול-R ע"י: $rn=f(r)n$.

בפרט, S הוא מודול-R.

טענה: אם N נ"ס כמודול-S, ו-S נ"ס כמודול-R, אז N נ"ס כמודול-R.

הוכחה:

N נוצר מ-S ע"י $\{y_i\}$ ו-S נוצר מ-R ע"י $\{x_j\}$.

אז N נוצר מ-R ע"י $\{x_j y_i\}$, כשכן לכל $n\in N$:

$$n=\sum_i s_i y_i=\sum_i\Big(\sum_j r_{ij}x_j\Big)y_i=\sum_{i,j} r_{ij}x_j y_i$$

בנ"ה בכיוון ההפוך: הרחבת סקלרים.

אם M מודול-R, אז הרחבת הסקלרים שלו היא $M\otimes_R S$ כמודול-S.

<u>דוגמאות:</u>

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[r, dash] & L_1\otimes L_2 \\ \mathbb{Q} \arrow[u, dash] \arrow[r, dash] & L_1 \arrow[u, dash] \end{tikzcd}$$

אם $L_1=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L_2=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ אז
$L_1\otimes L_2=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$

אם L_1 הרחבה סופית, $L_2=\mathbb{C}$, אז:

$$L_1\otimes L_2=\mathbb{C}^{[L_1:\mathbb{Q}]}$$

<u>הערה:</u> פה אנו מדברים על מכפלה טנזורית של אלגבראות שנראה בהרצאה הבאה.

<u>תרגיל:</u> $L_1\otimes L_2$ תחום $\iff$?