סיכום משפטים עיקריים מרוכבות

הנגזרת המרוכבת

הגדרה - $f: D \to \mathbb{C}$, D קבוצה פתוחה, $z_0 \in D$
f גזירה ב- z_0 אם הגבול קיים:

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

כלומר -

$$\forall(\varepsilon>0).\ \exists(\delta>0).\ \forall(h\in\mathbb{C}.\ 0<|h|<\delta).\ \left[\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0)\right|<\varepsilon\right]$$

הנגזרת המרוכבת מקיימת את כל התכונות הרגילות של נגזרת.
על מנת להפריך גזירות, אפשר להראות שתי סדרות $a_n, b_n \to 0$ בכיוונים שונים, ולהראות שגבול הנגזרת שונה.

משוואות קושי רימן

משפט - תהי f גזירה ב- z, כאשר $z=x+iy$, $f=u(x,y)+iv(x,y)$. אזי:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x\end{cases} \longrightarrow$$ אלה משוואות קושי רימן (להלן, C-R)

טענה - ~~אם~~ תחת סימוני המשפט, אם u_x,u_y,v_x,v_y קיימות ורציפות ומקיימות C-R ב-z,
אזי f גזירה ב- z:

$$f'(z) = u_x(z) - i u_y(z)$$

מסקנה - אם D תחום, $f: D\to\mathbb{C}$ הולומורפית, ומתקיים אחד מהבאים:
1) $\forall z\in D.\ f'(z)=0$
2) $Re(f)$ או $Im(f)$ קבוע
3) $|f|$ קבוע
אזי f קבועה.

שמירת זוויות

הגדרה - מסילה היא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה.
היא ~~רגולרית~~ גזירה אם החלק הממשי והמדומה גזיר.
היא רגולרית אם ב- t_0 אם היא גזירה ו- $\gamma'(t_0)\neq \binom{0}{0}$

$\gamma'(t_0)$ הוא וקטור המהירות המשיק ל- γ, וכיוונו $Arg(\gamma'(t_0))$

מסקנה - תהי $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית, $z_0\in D$ כך ש- $f'(z_0)\neq 0$
ויהיו γ_1,γ_2 עקומות רגולריות ב- t_1,t_2 כך ש- $\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)$.
אז הזווית בין $f\circ\gamma_1$ ל- $f\circ\gamma_2$ בנק' החיתוך שווה
לזווית בין γ_1 ל- γ_2 בנק' החיתוך.

נאמר ש- f משמרת זוויות, או קונפורמית.

העתקות מוביוס

הגדרה - העתקת מוביוס היא העתקה $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$

כאשר $(c,d) \neq (0,0)$, $ad-bc \neq 0$

* תנאים אלו מבטיחים שההעתקה לא קבועה.

תכונות - 1) כל העתקה מתאימה למטריצה $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
מתקיים $(h_A)^{-1} = h_{A^{-1}}$

בפרט, כל העתקת מוביוס היא הפיכה.

2) $h' \neq 0$ בכל נקודה בה היא מוגדרת ($z \neq -\frac{d}{c}$)

3) אם $A \neq I$ יש ל- h_A נק' שבת ב- ∞ אם $c=0$,
ואחרת יש לה נק' שבת 1 או 2 ב- $\mathbb{C}$.

4) העתקת מוביוס נקבעת ביחידות ע"י 3 נקודות

5) מעגל מוכלל זה מעגל או ישר
העתקות מוביוס מעתיקות מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים

6) אם $h : D \to \mathbb{C}$, אז $h(\partial D) = \partial h(D)$
(כלומר, העתקות מוביוס מעבירות שפה לשפה)

פונקציות אלמנטריות

הגדרה - $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

טענה - אלו הרחבות הולומורפיות של הפונקציות הרגילות. כלומר, הערכים ב- $\mathbb{R}$
הם כרגיל, וה פונקציות הולומורפיות.

תכונות - 1) מתקיימות רוב התכונות הרגילות של ~~...~~ שאנחנו מכירים מ- $\mathbb{R}$
2) $\sin, \cos$ לא חסומות
3) $\sin, \cos$ מחזוריות 2π , e^z מחזורית $2\pi i$
4) e^z מעבירה ישרים $x = x_0$ למעגלים ברדיוס e^{x_0}
וישרים $y = y_0$ לקרניים בזוית y_0.

הגדרה - $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z)$

מתקיים: $e^{\text{Log}(z)} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\,\text{Arg}(z)} = |z| \cdot e^{i\,\text{Arg}(z)} = z$

Log רציף ב- $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ומוגדר ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

ענפים

הגדרה - g הפיכה ימנית ל- f אם $f(g(z)) = z$ לכל z בתחום D.

אם g הפיכה ימנית ל-f ב-D ורציפה, אז g ענף של f^{-1} ב-D.

דוגמאות - $Log(z)$ ב- $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ענף של $(e^z)^{-1}$

- $g_1=\sqrt{|z|}\,e^{i\frac{Arg(z)}{2}}$, $g_2=-g_1$ ענפים של $(z^2)^{-1}$ ב- $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

טענה - $f:U\to\mathbb{C}$ הולומורפית, g ענף של f^{-1} ב-D.
תהא $z\in D$, $w=g(z)\in U$
אז אם $f'(w)\neq 0$, g גזירה ב- z ומתקיים $g'(z)=\dfrac{1}{f'(w)}$

טענה - כל הענפים של $(e^z)^{-1}$ הם: $Log(z)+2\pi i k$
או
$\ln|z|+i(Arg(z)+2\pi k)$

טענה - $f(z)=z^p$. כל הענפים של $\sqrt[p]{z}$ הולומורפים, והם מהצורה:
$$g=\zeta\left(\sqrt[p]{|z|}\cdot e^{i\frac{Arg(z)}{p}}\right)$$
כאשר ζ שורש יחידה של p. $(\zeta^p=1)$

הערה - גם כאן התחום הוא $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

האינטגרל המרוכב

הגדרה - $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה. $\int_a^b\varphi(t)dt=\int_a^b Re(\varphi(t))dt+i\int_a^b Im(\varphi(t))dt$

תכונות - כל התכונות של אינטגרל ממשי. בפרט:
1) לינאריות
2) ניוטון לייבניץ
3) $\left|\int_a^b\varphi(t)dt\right|\le\int_a^b|\varphi(t)|dt$

הגדרה - $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה גזירה שנגזרתה רציפה למקוטעין, f מוגדרת על $Im(\gamma)$ ורציפה.
$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

תכונות - 1) לינאריות (ב- f וב- γ)
2) $\left|\int_\gamma f\right|\le\int_a^b|f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt$
3) $\left|\int_\gamma f\right|\le\sup_t|f(\gamma(t))|\cdot len(\gamma)$, $len(\gamma):=\int_a^b|\gamma'(t)|dt$
4) ניוטון לייבניץ - G פתוחה, $F\in Hol(G)$, $\gamma\subset G$.
נניח ש- $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה ומקיימת $F'(z)=f(z)$.
אז:
$$\int_\gamma f\,dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$
5) אם $f_n\to f$ במ"ש אז: $\int_\gamma f_n\longrightarrow\int_\gamma f$
6) אם $F\in Hol(G)$ ו- $F'=f$ רציפה, ו- γ מסילה סגורה, אז $\int_\gamma f\,dz=0$

משפט קושי

הלמה של גורסט - תהי G פתוחה, $f\in Hol(G)$, $T\subset G$ משולש. אזי:

$$\int_{\partial T} f(z)dz=0$$

משפט קושי - יהי G תחום קמור, $f\in Hol(G)$. אז לכל γ סגורה C' למקוטעין מתקיים:

$$\int_{\gamma} f(z)dz=0$$

נוסחאת קושי - יהי G תחום קמור, $f\in Hol(G)$, $\overline{D(r)}\subset G$. אזי:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad \forall z\in D(r).$$

הכללה - $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

משפט הערך הממוצע - תחת אותם סימונים:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_z(r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\gamma(t))dt$$

כאשר $\gamma(t)=z+re^{it}$

(מעגל ברדיוס r סביב z)

אינטגרל קושי - הגדרה: γ חלקה C' למקוטעין, $\phi:\gamma\to\mathbb{C}$ רציפה.

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma.\quad F(z)=\int_\gamma\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

למה - F הולומורפית ב- $\mathbb{C}\setminus\gamma$. היא גזירה מכל סדר, ו- $F^{(n)}(z)=n!\int_\gamma\frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$
בנוסף, בכדור $D_{z_0}(r)$, $r=dist(\gamma,z_0)$, מתקיים:

$$a_n=\frac{F^{(n)}(z_0)}{n!},\quad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

משפט - $z_0\in\mathbb{C}$, $\{a_n\}\subseteq\mathbb{C}$, $\frac{1}{R}=\overline{\lim}|a_n|^{1/n}$. נגדיר $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

1) לכל $z\in D_{z_0}(R)$, הטור מתכנס בהחלט במ"ש מקומית
2) לכל $z\notin D_{z_0}(R)$, הטור אינו מתכנס
3) ב- $D_{z_0}(R)$, f הולומורפית, ו- $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$
4) $\forall n.\ f^{(n)}\in Hol(D_{z_0}(R))$ ו- $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

משפט - תהי $f\in Hol(G)$. נניח $\overline{D_{z_0}(r)}\subset G$.
אז יש פיתוח של f לטור חזקות:
המתכנס במ"ש מקומית ו- $\forall z\in D_{z_0}(r).\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

משפט מורה - נניח ש- $f:G\to\mathbb{C}$, G פתוחה, פוני רציפה.
נניח שלכל משולש $T\subset G$,
$\int_{\partial T} f(z)dz=0$
אז f הולומורפית ב- G.

מסקנה - $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה, הולומורפית ב- $G\setminus\{z_0\}$, אז $f\in Hol(G)$.

משפט ההערכה של קושי - תהי $f\in Hol(D_{z_0}(R))$.
אז לכל $r<R$ ולכל n טבעי:

$$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!}{r^n}\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|$$

משפטי יחידות

משפט ליוביל - תהי $f\in Hol(\mathbb{C})$. אז אם f חסומה, f קבועה.

משפט יחידות I - יהי G תחום, $f\in Hol(G)$.
נניח שיש $a\in G$ בה $\forall n\in\mathbb{N}.\ f^{(n)}(a)=0$
אז $f\equiv 0$.

משפט יחידות II - G תחום, $f\in Hol(G)$.
נניח שיש סדרה $\{z_n\}\subset G$ כך ש- $z_n\to a\in G$, $\forall n.\ z_n\ne a$.
אז אם לכל $n\in\mathbb{N}$, $f(z_n)=0$, $f\equiv 0$.

משפט ויירשטראס - תהי G פתוחה $f_n\in Hol(G)$.
אם $f_n\to f$ במ"ש מקומית, אז $f\in Hol(G)$, ו- $f_n^{(i)}\to f^{(i)}$ במ"ש מקומית.

עיקרון המקסימום - יהי G תחום. אם $|f|$ מקבלת מקסימום מקומי ב- $z_0\in G$,
אז f קבועה.

הלמה של שוורץ - תהי $f:D\to D$ הולומורפית, $f(0)=0$.
1) $\forall z\in D.\ |f(z)|\le|z|$
2) $|f'(0)|\le 1$
3) אם $|f'(0)|=1$ או אם קיים $z\in D$ כך ש- $|f(z)|=|z|$ אז יש $\lambda\in\mathbb{C}$
כך ש- $|\lambda|=1$ כך ש- $f(z)=\lambda z$.

דוגמה שימושית - יהי $a\in D$. נסמן $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$
זוהי העתקה חח"ע ועל $\varphi_a:D\to D$, וכל העתקה חח"ע ועל מתחום זה
היא מהצורה הנ"ל.
מתקיים בנוסף:

$$\varphi_a(a)=0$$
$$\varphi_a'(0)=1-|a|^2$$
$$\varphi_a'(a)=\frac{1}{1-|a|^2}$$

טורי לורן

הגדרה - תהי $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ סדרה. נסמן $\Sigma_+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\Sigma_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$

טור לורן סביב $z_0 \in \mathbb{C}$ הוא $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \Sigma_+ + \Sigma_-$

נאמר שהטור מתכנס אם Σ_+ ו- Σ_- מתכנסים.

נגדיר - $R_+ = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$, $R_- = \overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n}$

אם $R_+ > R_-$ נגדיר את טבעת ההתכנסות:

$$A = A_{z_0}(R_-, R_+) = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_- \le |z_0 - z| \le R_+ \}$$

משפט לורן I - נתון טור לורן $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סביב $z_0 \in \mathbb{C}$. A טבעת ההתכנסות.

1) הטור מתבדר ב- $\mathbb{C} \setminus \bar{A}$

2) אם $R_+ > 0$, Σ_+ מתכנס במ"ש מקומית, ובהחלט, ב- $D_{z_0}(R_+)$

3) אם $R_- \ge 0$, Σ_- -"- -"- -"- ב- $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{z_0}(R_-)}$

4) אם $R_+ > R_-$, הטור מתכנס במ"ש מקומית ובהחלט ב- A ,
סכומו פונ' הולומורפית f , ובנוסף:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall r \in (R_-, R_+)$$

משפט לורן II - תהי $f \in Hol(A_{z_0}(a,b))$, $0 \le a < b$.
אז יש פיתוח לורן:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

וההתכנסות היא במ"ש מקומית, בהחלט.
מתקיים:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_0}(r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall r \in (a,b)$$

נק' סינגולריות

נסמן ב- $D^*_{z_0}(r)$ את הדיסק המנוקב ברדיוס r סביב z_0 .

נק' סליקה - z_0 סינגולרית סליקה אם יש המשכה הולומורפית ל- f ב- $D_{z_0}(r)$.
במקרה זה, לכל $n < 0$, בטור הלורן של f , $a_n = 0$

משפט ההמשכה של רימן - $f \in Hol(D^*_{z_0}(r))$. z_0 סליקה $\longleftrightarrow$ f חסומה ב- $D^*_{z_0}(\delta)$, $0 < \delta < r$

מסקנה - z_0 סליקה $\longleftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ קיים וסופי.

נק' סינגולרית עיקרית - z_0 סינגולרית עיקרית אם יש אינסוף n-ים שליליים עבורם $a_n \ne 0$.
z_0 סינגולרית עיקרית $\longleftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ לא קיים.

משפט קסורטי ווירשטראס - $f \in Hol(D^*_{z_0}(r))$ ו- z_0 סינגולרית עיקרית.
אז $f(D^*_{z_0}(r))$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
כלומר, לכל $w \in \mathbb{C}$ יש $\{z_n\} \subseteq D^*_{z_0}(r)$ כך ש- $z_n \to z_0$, $f(z_n) \to w$.

קוטב - z_0 קוטב אם יש m כך שלכל $n>m$, $a_{-n}=0$.
נאמר ש- z_0 קוטב מסדר m.
z_0 קוטב של f אומר $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

טענה - אם z_0 קוטב מסדר m של $f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$
אז קיימת $g\in Hol(D_{z_0}(r))$ כך ש-
$$f=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

אפס - אם $0\not\equiv f\in Hol(G)$, אז נ"ק $a\in G$ נקראת אפס של f אם $f(a)=0$,
והריבוי של a הוא $\min\{n\geq 1 \mid f^{(n)}(a)\neq 0\}$

טענה - אם a אפס של $f\in Hol(G)$ מריבוי m, אז $f(z)=(z-a)^m g(z)$
כאשר $g\in Hol(G)$ ו- $g(a)\neq 0$.

משפט - 1) אם ל- f יש אפס מריבוי m ב- z_0 $\longrightarrow$ ל- $\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר m ב- z_0
2) אם ל- f יש קוטב מסדר m ב- z_0 $\longrightarrow$ ל- $\frac{1}{f}$ יש אפס מריבוי m ב- z_0

אינדקס של מסילה

למה - תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מסילה.
אז יש פונקציה רציפה $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש- $\theta(t)\in\arg(\gamma(t))$. $\forall t\in[a,b]$.

טענה - אם γ חלקה למקוטעין אז $\psi(t)=Log(\gamma(t))+\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds$
ה"א בחירה רציפה של γ ln.
כלומר:
$$\gamma(t)=e^{\psi(t)}$$

הגדרה - תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ עקומה סגורה.
$$Ind_\gamma(0)=\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}=\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2\pi i}$$

תהי $z\notin\gamma$. נגדיר $\gamma_z(t)=\gamma(t)-z$. אז:
$$Ind_\gamma(z)=Ind_{\gamma_z}(0)$$

משפט - $$Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}$$

תכונות - נסמן $\mathcal{U}=\mathbb{C}\setminus\gamma$
1) $Ind_\gamma(z)=-Ind_{-\gamma}(z)$
2) $Ind_\gamma(z)$ קבוע על כל רכיב הקשירות של $\mathcal{U}$.
3) $0=Ind_\gamma(z)$ על הרכיב הקשירות הלא חסום של $\mathcal{U}$.

נוסחאת קושי הכללית - $f\in Hol(G)$, G תחום קמור, $\gamma\subset G$ מסילה סגורה.
$$Ind_\gamma(z)\cdot f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad \forall z\in G\setminus\gamma.$$

הכללה נוספת למשפט קושי - מספיק לדרוש ש- γ כוויצה, לא חייבים G קמורה.
כלומר, אם G תחום, $f\in Hol(G)$, $\gamma\subset G$ כוויצה, אז:

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

משפט - f רציפה בתחום G.
אז ל- f יש קדומה ב- G $\longleftrightarrow$ לכל $\gamma\subset G$ סגורה $\int_\gamma f=0$

ענפי log

הגדרה - תהי $f\in Hol(G)$, G תחום. ענף של $\log f(z)$ זו פונ' $g\in Hol(G)$ כך ש:

$$\forall z\in G.\ e^{g(z)}=f(z)$$

הערה - תנאי הכרחי - $\forall z\in G.\ f(z)\neq 0$

משפט - $f\in Hol(G)$ חסרת אפסים.
אז קיים ענף של $\log f$ ב- G אמ"מ לכל $\gamma\subset G$ סגורה:

$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=0$$

כלומר - לכל γ סגורה, $f(\gamma)$ "לא מקיפה את הראשית".

מסקנה - אם $0\notin G\subset\mathbb{C}$, אז יש ענף של $\log z$ אמ"מ לכל $\gamma\subset G$ סגורה $Ind_\gamma(0)=0$

טענה - $f:G\to\mathbb{C}$ לא מתאפסת על γ, $\gamma\subset G$ מסילה סגורה. אז:

$$Ind_{f\circ\gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi$$

שאריות

הגדרה - תהי $f\in Hol(D^*_{z_0}(r))$, אז יש ל- f פיתוח לורן.
השארית של f ב- z_0 היא $Res_{z_0}(f)=a_{-1}$
(המקדם של $\frac{1}{z-z_0}$ בפיתוח לורן סביב z_0).

טענה - נניח של- f יש קוטב מסדר m ב- z_0. אז:

$$Res_{z_0}(f)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

משפט השאריות - $f\in Hol(G\setminus E)$ כש- G תחום ו- E קבוצה סופית של נק' סינגולריות.
תהי $\gamma\subset G\setminus E$ מסילה סגורה כוויצה ב- G.
אז:

$$\int_\gamma f=2\pi i\sum_{z\in E}Ind_z(f)\cdot Res_z(f)$$

עיקרון הארגומנט - יהי G תחום ו- $f\in Hol(G)$ לא קבועה פרט למספר סופי של נק' סינגולריות קוטביות.
תהי $\gamma\subset G$ מסילה כווצה כך ש- $\forall z\in G.\ Ind_\gamma(z)\in\{0,1\}$.
נגדיר $Int(\gamma)=\{z \mid Ind_\gamma(z)=1\}$.
נניח של- f אין קטבים או אפסים על γ.
נסמן: Z = מספר האפסים של f ב- $Int(\gamma)$ כולל ריבוי
P = -״- הקטבים -״- -״-
אז- $Ind_{f\circ\gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = Z-P$

משפט רושה - יהי G תחום ו- f,g הולומורפיות לא קבועות ב-G.
תהה $\gamma\subset G$ מסילה כווצה כך ש $\forall z\in G.\ Ind_\gamma(z)\in\{0,1\}$
נניח כי:
$\forall z\in\gamma.\ |f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$
אז ל- f,g אותו מספר אפסים ב- $Int(\gamma)$

משפט הורוביץ - יהי G תחום, $f_n\in Hol(G)$, $Z_{f_n}(G)=0$ (מספר האפסים של f_n כולל ריבוי ב-G)
נניח כי $f_n\to f$ במ"ש ב-G.
אז או ש- f קבועה, או ש- $Z_f(G)=0$.

משפט הכיסוי המסועף

הגדרה - $f\in Hol(G)$ לא קבועה. נניח $f(z_0)=w_0$.
נאמר ש- w_0 מתקבלת בריבוי m אם z_0 אפס בריבוי m של $f(z)-w_0$.
כלומר, הפיתוח טיילור של f סביב z_0 הוא:
$f(z)=w_0+a_m(z-z_0)^m+\dots,\quad a_m\neq 0$

משפט - תהי $f\in Hol(G)$ לא קבועה. תהי $w_0=f(z_0)$ בריבוי m.
אז לכל $\varepsilon>0$ קטן מספיק יש $\delta>0$ כך שלכל w: $0<|w-w_0|<\delta$
יש בדיוק m פתרונות למשוואה $f(z)=w$ ב- $D_{z_0}(\varepsilon)$.
בנוסף w מתקבלת בריבוי m.

מסקנות - 1) משפט ההעתקה הפתוחה: $f\in Hol(G)$ לא קבועה, G תחום.
אז לכל $V\subset G$ פתוחה, $f(V)$ פתוחה.

2) אם $f\in Hol(G)$ חח"ע אז $\forall z\in G.\ f'(z)\neq 0$

3) אם $f\in Hol(G)$ חח"ע, אז $f^{-1}: f(G)\to G$ הולומורפית.

משפט ההעתקה של רימן

משפט סטילג'ס-אוסגוד - תהה $f_n: G\to\mathbb{C}$, G תחום, הולומורפיות ו- $\forall z\in G.\ |f_n(z)|\le M$ $\exists M.\ \forall n$
אז יש תת סדרה f_{n_k} המתכנסות במ"ש מקומית ב-G.

משפט - יהי $G\subsetneq\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, $z_0\in G$.
אז קיימת העתקה הולומורפית חח"ע ועל f כך ש: $f: G \xrightarrow[f(z_0)=0]{\sim} D_0(1)$
אם g העתקה נוספת המקיימת זאת, אז קיים $\theta\in\mathbb{R}$ כך ש:
$g(z)=e^{i\theta}\cdot f(z)$