

סיבוכיות

© ארזים

5 באפריל 2017

הגדרה 0.1 תהי $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. מכונת טיורינג M עם זכרון $S(n)$ היא מכונה רגילה בעלת שלושה סרטים:

1. סרט הקלט, שעליו נמצא הקלט והוא לקריאה בלבד.
2. סרט העבודה, שעליו קוראים וכותבים לכל היותר $S(n)$ תאים, כאשר $n = |x|$ אורך הקלט.
3. סרט הפלט, שעליו נכתב הפלט והוא לכתיבה בלבד - הראש הקורא יכול רק לזוז ימינה.

הגדרה 0.2 $DSPACE(S(n))$ היא אוסף השפות שניתן לקבל על ידי מכונת טיורינג עם זכרון $O(S(n))$.

תרגיל תארו מכונת טיורינג עם זכרון $O(\log s)$ שבהינתן נוסחא φ וקלט אליה x , מחשבת את $\varphi(x)$. $s = |\langle \varphi \rangle, x|$ אורך הקלט.

פתרון נעשה מעבר in-order על העץ. בהתחלה הולכים כל הזמן שמאלה עד שמגיעים לעלה, ואז קוראים את הערך שלו, ועולים למעלה לאבא שלו. נגיע לקודקוד u , ויהיה לנו ערך b של הבן שלו כרגע. כעת נעבוד לפי מקרים:

1. אם u שער \vee , $b = 1$, נעלה לאבא של u עם $b = 1$. אם u שעה \wedge , $b = 0$, נעלה לאבא של u עם $b = 0$.

2. אם u שער \vee , $b = 0$, נעבור לבן הבא של u עם b מאותחל. הכוונה ביחס סדר על הבנים היא לפי סדר הופעתם בקלט. אם אין עוד בנים, נעלה למעלה עם $b = 0$. בדומה נעבוד אם u שער \wedge , $b = 1$.

3. אם u שער \neg , נעלה לאבא של u עם ההפוך של b .

הנכונות נובעת באינדוקציה. זיכרון הוא $O(\log s)$.

כעת נראה טיעון כללי - Padding Argument.

הגדרה 0.3

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(n^c)$$
$$E = \text{DTIME}(2^{O(n)})$$

תרגיל הוכיחו כי $E \neq PSPACE$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש שוויון, ונראה כי $DTIME(2^{O(n^2)}) \subseteq E$, בסתירה למשפט ההיררכיה בזמן. תהי $A \in DTIME(2^{O(n^2)})$, ותהי M_A מכונה מתאימה. יהי # תו לא באלפבית המקורי. נגדיר

$$B = \{x\#^{|x|^2-|x}| \mid x \in A\}$$

נרצה לטעון כי $B \in DTIME(2^{O(n)}) = E$. יהי y קלט באורך n . נבדוק כמה תווים יש לפני התו # הראשון, ונסמן מספר זה k . נסמן תוים אלה x , ונבדוק שאחריהם מופיעים $k^2 - k$ תוים #. לבסוף, נריץ M_A על x , ונענה כמורה. הנכונות של ריצה זו ברורה. ננתח את הזמן:

$$O(k^2 + 2^{O(k^2)}) = O(2^{O(k^2)}) = [n = k^2] = O(2^{O(n)})$$

אם כן, לפי ההנחה, $B \in PSPACE$, ולכן קיים $c \in \mathbb{N}$ עבורו $B \in DSPACE(n^c)$. כעת, $A \in DSPACE(n^{2c})$. מדוע? בהינתן קלט x של A , נריץ מכונה של B על $x\#^{|x|^2-|x|}$ ונענה כמורה. הזיכרון הוא אכן $O((n^2)^c) = O(n^{2c})$. הנכונות ברורה לפי הגדרת B . לכן קיבלנו כי $A \in PSPACE$, כלומר מההנחה שלנו $A \in E$, והגענו לסתירה שרצינו. ■

הערה 0.4 נשים לב שהשתמשנו בשתי ההכלות - ההוכחה לא מוצאת איזו מההכלות לא נכונה. למעשה זה לא ידוע.