סיבוכיות

ארזים ©

16 במאי 2017

הגדרה 0.1 תהי C מחלקת שפות. מגדירים

$$\mathrm{co}C = \left\{ \overline{A} \mid A \in C \right\}$$

משפט 0.2 $\mathrm{NL} = \mathrm{coNL}$.

"זיכרון אפשר למחזר... הזמן שחלף הוא אבוד" - המתרגל.

תרגיל נגדיר B את שפת הגרפים הלא מכוונים הדו צדדיים. הוכיחו כי $B \in \mathrm{NL}$.

הוכחה: מספיק להראות $\overline{B} \in \mathrm{NL}$. בשביל זה ניעזר בעובדה כי G לא דו צדדי אם ורק אם יש בו מעגל אי זוגי. נתאר מוודא בזכרון $O(\log n)$ עבור $\overline{B}$. המוודא יצפה לעד מהצורה $v_0, v_1, \ldots, v_0$ ויוודא שזהו מעגל אי זוגי. צריך לזכור את v_0, את זוג הקודקודים הנוכחי v_i, v_{i+1} שביניהם מוודאים קיום קשת, וביט שסופר את הזוגיות של המעגל. ■

עובדה $3-\mathrm{SAT}$ היא NP שלמה.

תרגיל הראו כי $2-\mathrm{SAT}$ היא NL שלמה. כמובן, זוהי שפת כל הנוסחאות בצורת 2CNF שהן ספיקות.

פתרון נתחיל מלהראות שהשפה NLקשה. נראה רדוקציה $\overline{\mathrm{STCON}} \leq_L 2\mathrm{SAT}$. יהי (G,s,t) קלט של $\overline{\mathrm{STCON}}$. נבנה פסוק φ_G שספיק אם ורק אם אין מסלול בין s,t בגרף G. ניזכר כי

$$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{x_1} \rightarrow x_2$$

"וזה כבר מזכיר מסלולים בגרפים. קודם כל כי יש חץ" - המתרגל.

לכל קודקוד $u \in G$ נגדיר משתנה x_u. נגדיר את φ_G כך שיתקיימו התכונות הבאות, לכל α שמספקת את φ_G:

1. אם הקודקוד v ישיג מהקודקוד s, אזי $\alpha(x_v) = 1$.
2. אם הקודקוד t ישיג מהקודקוד u, אזי $\alpha(x_u) = 0$.

אם נצליח לבנות כך את φ_G, ברור שאם יש מסלול אז אין השמה מספקת. בבנייה שנראה, נראה גם שאם אין מסלול אז יש השמה מספקת. נגדיר

$$\varphi_G = x_s \wedge \overline{x_t} \bigwedge_{(u,v)\in E} (x_u \to x_v)$$

כמובן נמיר את הדברים מהצורה $x_u \to x_v$ להיות $\overline{x_u} \vee x_v$. ברור שבנייה זו דורשת זיכרון לוגריתמי. נראה φ_G ספיקה אם ורק אם אין מסלול בין s, t.

נניח שיש מסלול. נראה שהנוסחה לא ספיקה. נניח בשלילה שהיא ספיקה, ותהי α השמה מספקת. $\alpha(x_s) = 1$, ובאינדוקציה, לכל קודקוד v שישיג מהקודקוד s מתקיים $\alpha(x_v) = 1$. באותו אופן, $\alpha(x_t) = 0$, ובאינדוקציה לכל קודקוד u שממנו הקודקוד t ישיג מתקיים $\alpha(x_u) = 0$. מצד שני, הנחנו כי הקודקוד t ישיג מהקודקוד s, בסתירה.

בכיוון השני, נניח שאין מסלול מהקודקוד s אל הקודקוד t. נבנה השמה α שמספקת את φ_G. נגדיר $\alpha(x_v) = 1$ אם ורק אם הקודקוד v ישיג מהקודקוד s. ברור כי $\alpha(x_s) = 1$, $\alpha(x_t) = 0$. נותר להראות כי לכל $(u, v) \in E$ α מספקת את $x_u \to x_v$. זה ברור - אם $\alpha(x_u) = 0$, זה מסתפק וסיימנו. אם $\alpha(x_u) = 1$, אזי הקודקוד u ישיג מהקודקוד s, ומחובר בקשת אל v, ולכן גם הקודקוד v ישיג מהקודקוד s, ועל כן $\alpha(x_v) = 1$, ולכן הפסוקית מסתפקת. אם כן, סיימנו.

נותר לנו להראות כי $2\mathrm{SAT} \in \mathrm{NL}$. יותר קל, ושקול, להראות $\overline{2\mathrm{SAT}} \in \mathrm{NL}$.

בהינתן נוסחת $2\mathrm{CNF}$ כלשהי φ, נגדיר גרף מכוון G_φ באופן הבא:

$$V = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}\}$$

אם הפסוקית $\alpha \vee \beta$ נמצאת בנוסחה φ, נחבר את הצלעות $(\overline{\alpha}, \beta)$, $(\overline{\beta}, \alpha)$.

למה 0.3 φ לא ספיק אם ורק אם יש מעגל מכוון בגרף G_φ שמכיל משתנה ושלילתו.

הוכחה: נניח שיש מעגל כזה. נראה שהנוסחה לא ספיקה. נניח בשלילה שיש השמה מספקת α. נסמן את המעגל $v_1 = x \to v_2 \to \cdots \to v_k = \overline{x} \to v_{k+1} \to \cdots \to v_l = x$. את $\alpha(x) = 1$, מהגדרת הגרף ובאינדוקציה נובע שלכל $i \geq 1$ מתקיים $\alpha(v_i) = 1$. אבל מתקיים $\alpha(v_k) = 0$, בסתירה. אם $\alpha(x) = 0$, $\alpha(v_k) = 1$, ולכן לכל $n \geq k$ מתקיים $\alpha(v_k) = 1$, אבל מתקיים $\alpha(v_l) = 0$, בסתירה.

בכיוון השני, נניח שלכל x אין מעגל שמכיל את $x, \overline{x}$. נגדיר השמה α שתספק את φ. נגדיר את T להיות אוסף כל אותם x שיש מסלול מהם אל $\overline{x}$. נגדיר את F להיות אוסף כל אותם y שיש מסלול מהקודקוד $\overline{y}$ אליהם. נגדיר $\alpha(x) = 1$ לכל $x \in T$, $\alpha(y) = 0$ לכל $y \in F$. מההנחה $F \cap T = \emptyset$ ולכן זה מוגדר היטב. לכל קודקוד שישיג מקודקוד כלשהו בתוך T צריך גם לתת את הערך 1, ולכל קודקוד שאפשר להשיג ממנו קודקוד כלשהו מתוך F צריך לתת את הערך 0. יש להראות שזה לא גורם לסתירות - לא נעשה את זה כאן (אין זמן). אם נשארו משתנים שלא קיבלנו ערך, אפשר לתת להם את הערך 1 ולפעפע אותו הלאה בגרף. יש להראות שגם זה לא

מוביל לסתירות. כמובן יש גם להראות שזה מספק את φ. בשביל זה, הלמה הבאה שימושית (נשאיר הביתה כי אין זמן). ■

למה 0.4 אם יש מסלול מהקודקוד α אל הקודקוד β, אז יש מסלול מהקודקוד $\overline{\beta}$ אל $\overline{\alpha}$.

המוודא הלוגריתמי של $\overline{\mathrm{2SAT}}$ יצפה לעד מהצורה $x, v_1, v_2, \ldots, \overline{x}, u_1, \ldots, u_l, x$ ויוודא שכל הצלעות קיימות, שהמעגל מסתיים היכן שהתחיל ($\overline{x}$) ועובד דרך $\overline{x}$. הזיכרון הוא לוגריתמי בבירור, והנכונות מהלמה. כדי לוודא קיום של צלע בגרף, יש לקרוא את הנוסחה ולפרש בהתאם להגדרה (לא זוכרים את הגרף).