סיבוכיות

ארזים ©

23 במאי 2017

הגדרה 0.1 (המחלקה RL) נאמר כי $A \in \mathrm{RL}$ אם קיימת מכונת טיורינג עם:

1. סרט קלט לקריאה בלבד.
2. סרט עבודה בגודל $O(\log n)$.
3. סרט אקראיות לקריאה בלבד, שבו הראש זז רק ימינה.
4. ריצה פולינומית.

כך שאם $x \in A$ אזי

$$\mathbb{P}_r\left(M\left(x,r\right)=1\right) \geq \frac{1}{2}$$

כאשר r האקראיות, ואם $x \notin A$ אזי

$$\mathbb{P}_r\left(M\left(x,r\right)=1\right) = 0$$

מתקיים

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{RL} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{L}^2 \cap \mathrm{P}$$

ואפילו יודעים כי $\mathrm{RL} \subseteq \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}$. מאמינים שמתקיים $\mathrm{RL} = \mathrm{L}$.

משפט 0.2 תהי USTCON שפת כל השלשות (G,s,t) כאשר G גרף לא מכוון שבו יש מסלול בין הקודקודים s,t. אזי $\mathrm{USTCON} \in \mathrm{RL}$ (והאמת שאפילו $\mathrm{USTCON} \in \mathrm{L}$ אבל את זה לא נראה).

הוכחה: נבצע הילוך מקרי בגרף, שמתחיל בקודקוד s, באורך n^5. אם הגענו אל t, נעצור ונקבל. אחרת, אחרי n^5 צעדים, עצור ודחה.
ברור שאם אין מסלול בין s,t הסתברות הקבלה היא 0, ושהזיכרון דורש רק את הקודקוד הנוכחי ומונה על n^5, כלומר $O(\log n)$.
נרצה עוד להוכיח שאם יש מסלול בין s,t, אז נראה את t בהסתברות טובה (נוכיח שלפחות $\frac{1}{2n}$, ואפשר להגביר עד חצי על ידי חזרה n^2 פעמים). הטענה הזו לא נכונה אם G גרף מכוון - יש דוגמאות נגדיות פשוטות.

בלי הגבלת הכלליות, G הוא גרף d רגולרי (נוסיף לולאות עצמיות אם צריך). נסמן A את מטריצת השכנויות המנורמלת של G, כלומר

$$A_{u,v} = \frac{n_{u,v}}{d}$$

כאשר $n_{u,v}$ היא כמות הקשתות בין u, v.

טענה 0.3 יהי p_0 וקטור התפלגות על הקודקודים. אזי $A^i p_0 = p_i$ הוא וקטור התפלגות על הקודקודים שמייצג בחירת קודקוד מסויים לפי p, וביצוע הילוך מקרי בגרף באורך i.

הוכחה: באינדוקציה על i. עבור $i = 0$ זה ברור. עבור $i > 0$:

$$A^i p_0 = A p_{i-1}$$
$$A^i p_0 (v) = A p_{i-1} (v) = \sum_u A_{v,u} p_{i-1} (u)$$

$A_{v,u}$ היא ההסתברות לעבור בין u, v, $p_{i-1}(u)$ מהנחת האינדוקציה היא ההסתברות שהגענו אל u אחרי $i-1$ צעדים. בעצם קיבלנו את נוסחת ההסתברות השלמה - ולכן זה יוצא ההסתברות שהגענו אל v אחרי i צעדים. ■

יהיה יותר קל לנתח מה קורה אם עושים הילוך מקרי עצל - $B = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$. זה לא משנה את יחס הישיגות והטענה עדיין נכונה. יהי p_0 הווקטור שהוא 1 בקואורדינטה s ואפס בכל האחרות. אנחנו רוצים להבן איך נראה הווקטור $B^k p_0$, ובפרט אנחנו רוצים להראות

$$B^k p_0 [t] \geq \frac{1}{2n}$$

עבור $k = n^5$. A סימטרית, ולכן יש לה n ערכים עצמיים ממשיים $-1 \leq \mu_n \leq \cdots \leq \mu_1 = 1$. גם B סימטרית, עם ערכים עצמיים $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu_i$. בפרט

$$0 \leq \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = 1$$

לאלה יש וקטורים עצמיים מתאימים $v_1, \ldots, v_n$ אורתונורמליים, עם $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, 1, \ldots, 1)$.

טענה 0.4 $\left|\left|B^k p_0 - \frac{1}{n}(1, \ldots, 1)\right|\right|_2^2 \leq \lambda_2^{2k}$. בתרגיל הבית אפילו נראה כי $\lambda_2 \leq 1 - \frac{1}{4n^4}$.

הוכחה: נכתוב

$$p_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

כאשר $\alpha_i = \langle p_0, v_i \rangle$. אזי $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$. כעת,

$$p_0 = \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$
$$B^k p_0 = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i$$

ולכן מתקיים

$$\left\|B^k p_0 - \frac{1}{n}(1,\dots,1)\right\|_2^2 = \left\|\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i\right\| = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^{2k} \leq$$
$$\leq \lambda_2^{2k} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \leq \lambda_2^{2k} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_2^{2k}$$

■

מסקנה 0.5

$$\left\|B^k p_0 - \frac{1}{n}(1,\dots,1)\right\|_2 \leq \left(1 - \frac{1}{4n^4}\right)^{n^5} \leq e^{-\frac{n^5}{4n^4}} = e^{-\frac{n}{4}}$$

ובפרט, אם לא מתקיים $B^k p_0 [t] \leq \frac{1}{2n}$ אז מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \left(B^k p_0 (i) - \frac{1}{n}\right)^2 \geq \frac{1}{4n^2}$$

בסתירה. ■