בדידות 15

הוכחנו (פחות או יותר) כי לכל זוג ממשיים $b>a$

$$|[a,b]| = |[a,b)| = |(a,b]| = |(a,b)| = \aleph$$

משפט: $|\mathbb{R}| = \aleph$

פונק': $tg : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ $\quad (tg|_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}})$

הפונק' ההפכה: $tg^{-1} = arctg : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

__הגדרה__: קבוצה תקרא אין סופית אם קיימת פונק' שקילות ממנה לתת קבוצה אמיתית שלה (מוכח ממש).

__שוויון שקול__: קב' היא אין סופית $\Leftrightarrow$ ישנה תת קבוצה בת מניה.

__משפט הנסור (מאת קנטור, דרש)__: $\aleph \neq \aleph_0$

נניח כי לא קיימת פ' $\mathbb{N}$-מ על $[0,1]$ (ממנה אין פ' שקילות ולכן $|\mathbb{N}| \neq |[0,1]|$ כלומר $\aleph_0 \neq \aleph$).

⊛ __משפט__: לכל מס' ממשי ב- $[0,1)$ הצגה יחידה כשבר עשרוני אין סופי.

הוכחת הנסור:

נניח קיום פ' $\mathbb{N}$-מ על $[0,1)$

⊛ __הגדרה__: פ' $\mathbb{N}$-מ לתוך קב' B תקרא __סדרה__ (אין סופית) של איברי A.

סדרה ממשית ממש שסימנת $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ הגדרתה מדויקת היא: $\lambda k \in \mathbb{N}.\ a_k\ (\in \mathbb{R})$

לצורך הקורס שלנו, המספר הראשון הוא a_0

המשך

נרשום את סדרת המס' הממשיים a_0, a_1, a_2 בזה אחר זה ברשימה כאשר כל אחד מוצג ע"י הפיתוח העשרוני שלו (ללא ...999).

a_0	3 3 3 3 3 3 3 3
a_1	1 4 2 8 5 7 1 4
a_2	1 2 5 0 0 0 0
a_4	3 1 4 1
	7

$X = .41444$

לפי הנסור רשימה כזו אינה כוללת את כל המס' הממשיים בקטע $[0,1)$. נמצא מס' ממשי X ששונה מרשימה כולה: אם הספרה ה-k-ית ב- a_k (הספרה ה-k-ית אחרי הנקודה) אינה 4, הספרה המתאימה ה-k-ית ב-X היא 4, אחרת 1.

אז נקבל כי בכל אינדקס n שהספרה ה-n-ית ב-X שונה

מהספרה ה-n-ית של האלכסון (כך שלא תתקבל סיומת $\overline{99}$)

$\Rightarrow$ X לא ברשימה! כי הוא שונה מכל איבר n בספרה

ה-n-ית שלו. מצד שני, X הוא מס' ממשי ב- $[0,1)$

$\Rightarrow$ X אינו בתמונת הפ' שמנינו

■

זוהי שיטת האלכסון של קנטור.

אריתמטיקה של עוצמות (הרחבות של טבעיים).

כפל: $|A|\cdot|B| = |A\times B|$

הכפל מוגדר היטב, כלומר תוצאת המכפלה תלויה בעוצמות של שתי הקבוצות ולא בשום תכונות אחרות שלהן.

למה 3: תהיינה $|A|=|C|$, $|B|=|D|$ אזי $|C\times D|=|A\times B|$

הוכחה: מהנתון קיימות $f:A\to C$ ו- $g:B\to D$ הפיכות.

נבנה $h:(A\times B)\to(C\times D)$ וזוהי הפיכה:

$h=\lambda\langle a,b\rangle\in(A\times B).\langle f(a),f(b)\rangle$

$h^{-1}=\lambda\langle c,d\rangle\in(C\times D).\langle f^{-1}(c),g^{-1}(d)\rangle$

חיבור: $|A|+|B| = |A\times\{0\}\cup B\times\{1\}|$

לדוג': $2+2=|\{1,2\}\times\{0\}\cup\{1,2\}\times\{1\}|=|\{\langle1,0\rangle,\langle2,0\rangle\}\cup\{\langle1,1\rangle,\langle2,1\rangle\}|$

עדיין יש להוכיח כי החיבור מוגדר היטב, כלומר תלוי רק בעוצמות של A ו-B ולא בתכונות נוספות.

משפט (הגדרה חלופית): אם $A\cap B=\emptyset$ אזי $|A|+|B|=|A\cup B|$

חזקה: $|A|^{|B|} = |A^B|$

כאשר A^B הוא קב' הפונק' מ-B ל-A הידועה גם כ- $B\to A$.

~~נשמש~~ נוכיח כי פ' החזקה מוגדרת היטב:

מהנתון $f:A\to C$ ו- $g:B\to D$ הפיכות קיימת פ' הפיכה h:
$(|B|=|A|;\ |C|=|D|)$

$h: A^B\to C^D$

(*) "כל" חוקי האריתמטיקה המוכרים ממספרים טבעיים חלים

על כל העוצמות, לרבות האינסופיות. (אסוציאטיביות, קומוטטיביות, דיסטריבוטיביות)
אבל ~~ה~~ "נ"סמ": $(|1|,|0|)$

המשך בדידה 15:

⊛ משפט והוכחה: מתקיים לכל α: $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.

הוכחה: תהיה A מעוצמה $|A| = \alpha$.

$$\alpha \cdot 2 = |A \times \{0,1\}| = |\{\langle a,x\rangle \mid a \in A \wedge x \in \{0,1\}\}| = |\{\langle a,x\rangle \mid x=0 \vee x=1,\ a \in A\}| =$$

$$= |\{\langle a,0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle a,1\rangle \mid a \in A\}| = |\alpha| + |\alpha| = \alpha + \alpha \quad \blacksquare$$

לפי הגדרתנו
לפעולת החיבור

⊛ לכל γ, β, α: $(\gamma^{\beta})^{\alpha} = \gamma^{\alpha \cdot \beta}$

הוכחה: כי קיים פונק' הפיכה ($|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$): $h : (A \to (B \to C)) \to ((A \times B) \to C)$

וזוהי בדיוק פונקציית Curry.

הראינו $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

וראה קודם ראשון $2^{\aleph_0} = \aleph$

מכאן: $\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$