בדידה 23

* הפונקציה $\lambda x.\frac{x^t}{(1-x)^n}$ יוצרת את הסדרה $\lambda k\in\mathbb{N}.\binom{n-1+k-t}{n-1}$

* המעבר סדרה $\leftrightarrow$ פ' יוצרת:

פונקציות יוצרות רגילות של סדרות עיקריות:

הסדרה:	פירוט a_k	$F=\lambda x$
$\chi(\mathbb{N})=\lambda n\in\mathbb{N}.1$	$11111....$	$\frac{1}{1-x}$ $(1+x+x^2+x^3+...)$
$\chi(\mathbb{N}\setminus\{0\})$	$01111...$	$\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$ $(0+x+x^2+x^3+...)$
$\chi(\mathbb{N}even)$	$1010101....$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(1+x^2+x^4+x^6+...)$
$\chi(\{1,2,3\})$	$011100000...$	$x+x^2+x^3$ $(x+x^2+x^3+0...)$

סדרות סכום ואופרטור הסכימה:

תהיה $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ סדרה.

נגדיר את סדרת הסכום שלה S_n ע"י: $\boxed{S_n=\sum_{i=0}^{n}a_i}$

בהינתן הסדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.S_n$, נוכל נחלץ את סדרת ההפרשים שלה, $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$

ע"י: $\boxed{a_{n+1}=S_{n+1}-S_n}$

תהיה $A=\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ סדרה, ו-F הפונ' היוצרת הרגילה של A: $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2...$

נתבונן ב- $F(x)\cdot(\frac{1}{1-x})$: $F(x)\cdot(\frac{1}{1-x})=(a_0+a_1x+a_2x^2+...)(1+x+x^2+x^3+...)$

$$F(x)\cdot(\frac{1}{1-x})=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+....+(a_0+a_1+...+a_k)x^k+...$$

$\Leftarrow$ קיבלנו ש- $\frac{F(x)}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}S_k\cdot x^k$

פורמלית: תהיה F הפ' היוצרת הרגילה של סדרה A. הפונקציה היוצרת של סדרת הסכומים $\lambda k.S_k$ היא $\boxed{G=\lambda x.\frac{F(x)}{1-x}}$

$(0+1+4+9+...+k^2)$

* מצאו "ביטוי סגור" לסכום הריבועים של מספרים טבעיים מ-0 עד k:

$S_k=\binom{3+k-1}{3}+\binom{3+k-2}{3}=$ $\Leftarrow$ $\boxed{\frac{x+x^2}{(1+x)^4}}=\frac{x}{(1-x)^4}+\frac{x^2}{(1-x)^4}$

S_k						
a_k	0	1	4	9	25	36..
סדרת ההפרשים	0	1	3	5	7	9 $\rightarrow$
עוד הפרשים	0	1	2	2	2	2
עוד הפרשים	0	1	1	0	0	0

סדרת האי זוגיים כי: $(n+1)^2-n^2=2n+1$

$F(x)=x+x^2$

קיבלנו: $S_k = \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3} = \frac{(k+2)(k+1)k + (k+1)k(k-1)}{3!} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

נוסחאות נסיגה:

סדרת פיבונצ'י: $0 \; 1 \; 1 \; 2 \; 3 \; 5 \; 8 \; 13 \; \ldots$

$\lambda n. a_n$ מוגדרת ע"י: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ וגם $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

* לקבוע ממשי C, הפ' היוצרת הסדרה של הסדרה $\lambda n \in \mathbb{N}. C^n = 1, c, c^2, c^3, \ldots$

$$F(x) = 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \ldots + c^nx^n = 1 + cx + (cx)^2 + (cx)^3 + \ldots = \frac{1}{1-cx}$$

הפ' היוצרת $\boxed{\lambda x. \frac{1}{1-cx}}$ יוצרת את סדרת החזקות של C.

נכתוב את נוסחת הנסיגה של פיבונצ'י: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

נעבור לסכומי טורים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

תהיה F הפ' היוצרת של סדרת פיבונצ'י ($F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$)

n					
0	a_2	$=$	a_1	$+$	a_0
1	a_3x	$=$	a_2x	$+$	a_1x
2	a_4x^2	$=$	a_3x^2	$+$	a_2x^2
$\vdots$					
n	$a_{n+2}x^n$	$=$	$a_{n+1}x^n$	$+$	a_nx^n

$$\frac{F(x) - a_0 - a_1x}{x^2} = \frac{F(x) - a_0}{x} + F(x) \xRightarrow{a_0=0,\, a_1=1} \frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{F(x)}{x} + F(x)$$

$$F(x) - x = xF(x) + x^2F(x)$$

$$(1 - x - x^2)F(x) = x$$

כאשר: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

* משפט הפירוק לשברים חלקיים - המקרה הריבועי. ביטוי מהצורה $\frac{R}{PQ}$

כאשר R, P, Q פולינומים ו- $P \neq Q$, קיימים a ו-b ממשיים כך ש- $\frac{R}{PQ} = \frac{a}{P} + \frac{b}{Q}$

נמצא את a, b עבור הביטוי שלנו: $F(x) = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x}$

לפי מכנה משותף: $x = a(1-\beta x) + b(1-\alpha x)$

ב- $x=0$: $0 = a + b \Rightarrow a = -b$

ב- $x = 1/\alpha$: $1/\alpha = a(1 - \frac{\beta}{\alpha})$

$a = \frac{1}{\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}} \Rightarrow b = \frac{1}{\frac{\beta - \alpha}{-\sqrt{5}}}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$$

כעת נמצא את a_n: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$

ומכאן שנוסחה סגורה לפיבונצ'י: $\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$

המשך בדידה 23:

* מצאו ביטוי סגור עבור האיבר הכללי של הסדרה $\lambda n.a_n$:

$a_0=0$, $a_1=1$ וגם $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $(0,1,5,19,65,\dots)$

פתרון:

תהיה F הפונ' היוצרת הרגילה של הסדרה. נקבל: $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

$$\frac{F(x)-a_0-a_1x}{x^2}=5\,\frac{F(x)-a_0}{x}-6F(x)$$

$$F(x)-a_1x=5xF(x)-6x^2F(x)$$

$$F(x)=\frac{x}{1-5x+6x^2}=\frac{x}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{1-2x}\Rightarrow\boxed{a_n=3^n-2^n}$$

∎

*

$$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k+k$$

$$\frac{F(x)-a_0-a_1x}{x^2}=\frac{F(x)-a_0}{x}+F(x)+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k}$$

נמצא את הפ' היוצרת:

$\frac{x}{(1-x)^2}$	$k=$	0	1	2	3	...
	הפרשים:	0	1	1	1	1 ....
x	־הפרשים	0	1	0	0	0 0