בדידה

הרצאה 6

משפט: לכל קבוצה A: $\emptyset \subseteq A$

הוכחה: תהי A קבוצה. $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

כי ערך האמת של ההנחה הוא F ($\emptyset$: הקבוצה בה לכל x $x \notin \emptyset$)

ומכאן שהגרירה מתקיימת.

מכאן: $\forall A. (\forall x. x \in \emptyset \Rightarrow x \in A) \Leftarrow \forall A. \emptyset \subseteq A$ ■

לפי כלל ההכללה של $\forall$

$\Updownarrow$

$\emptyset \subseteq A$

פעולות בוליאניות על קבוצות:

* **איחוד:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
* **חיתוך:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
* **הפרש:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
* **הפרש סימטרי:** $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

זהויות בוליאניות בתורת הקבוצות:

אלו הן שוויונות הכוללים משתני קבוצות ופעולות בוליאניות המתקיימים לכל הצבה של קבוצות במשתנים, כלומר פסוק אמת כאשר כל המשתנים מכומתים בכמת כולל.

תרגיל: הוכיחו את הזהות: $\forall A, \forall B, \forall C: A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

הוכחה:

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

(נסמן: α - $x \in A$; β - $x \in B$; γ - $x \in C$)

לפי הטאוטולוגיה: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ ← דיסטריבוטיביות = חוק הפילוג

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ■

כללי בניית קבוצות (נוכח הפרדוקס של ראסל)

① קבוצות מיוחדות מתוך תורות ספציפיות:

$\mathbb{N}$ - קב' הטבעיים (כולל 0) $\quad$ $\mathbb{N}^+$ - הטבעיים ללא 0

$\mathbb{Z}$ - השלמים $\quad$ $\mathbb{Q}$ - רציונאליים

$\mathbb{R}$ - ממשיים $\quad$ $\mathbb{C}$ - מרוכבים ...

② $\{a,b,c,\dots\} = \{x \mid x=a \vee x=b \vee x=c \vee \dots\}$

כאשר כל אחד מ-$a,b,c,\dots$ הוא ביטוי המתאר עצם כלשהו בתורת הקבוצה.

③ עקרון הקומפרהנסיה המוגבלת:

יהיה S ביטוי המתאר קבוצה (כאשר x אינו מופיע בתיאור של S כמשתנה חופשי), ותהיה A נוסחה (מדו"כ תבנית פסוק הכוללת את A כמשתנה חופשי). בתנאים אלה: $\{x\in S \mid A\}$ היא קבוצה.

④ עקרון ההחלפה:

יהיה S ביטוי המתאר קבוצה (ללא x חופשי), יהיה t ביטוי המתאר עצם (מדו"כ תבנית עם x כמשתנה חופשי), אזי $\{t \mid x\in S\}$ היא קבוצה.

⑤ עקרון קבוצת החזקה:

לכל קבוצה, אוסף תת הקבוצות שלה גם הוא קבוצה. אוסף תת הקבוצות של הקבוצה A נקרא קבוצת החזקה של A.

מסומן $P(A)$ או 2^A: $\quad P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$

לפי כלל B: $\quad B\subseteq A \Leftrightarrow B\in P(A)$.

* תרגיל: נגדיר $A=\{\emptyset, a, \{\emptyset, a\}\}$. חשבו את $P(P(A))\cap P(A)$

$$H=P(A)=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{\emptyset,a\}\}, \{\emptyset,a\}, \{\emptyset,\{\emptyset,a\}\}, \{a,\{\emptyset,a\}\}, \{\emptyset,a,\{\emptyset,a\}\}\}$$

מבין איברי H נותיר את אלה השייכים גם ל-$P(H)$:

$$H\cap P(H) = P(A)\cap P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset,a\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset,a\}\}\} \blacksquare$$

* תרגיל: תהינה A ו-B קבוצות. הוכח או הפרך:

$\boxed{\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(A)\cap P(B) \text{ (א)} \checkmark \\ P(A\cup B)=P(A)\cup P(B) \text{ (ב)} \times \end{array}}$?

(א) נכון:

$$H\in P(A\cap B) \Leftrightarrow H\subseteq (A\cap B) \Leftrightarrow \forall x.\ x\in H \Rightarrow x\in (A\cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x.(x\in H \Rightarrow x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow (\forall x.\ x\in H\Rightarrow x\in A)\wedge(\forall x.\ x\in H\Rightarrow x\in B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (H\subseteq A)\wedge(H\subseteq B) \Leftrightarrow H\in P(A) \wedge H\in P(B) \Leftrightarrow H\in P(A)\cap P(B) \blacksquare$$