תרגול 10: קומבינטוריקה

(1) **עקרון החיבור:** תהיינה A,B קב' כך ש- $A\cap B=\emptyset$. אזי לבחירת איבר אחד משתי הקבוצות יש $|A|+|B|$ אפשרויות.

(2) **עקרון הכפל:** תהיינה A,B קבוצות. לבחירת איבר מ-A ואיבר מ-B יש $|A|\cdot|B|$ אפשרויות.

(3) מספר האפשרויות לסדר n עצמים בשורה: $n!$

(4) מס' האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עם חשיבות לסדר: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

(5) מס' האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר: $C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

דוגמאות:

1. מס' הוקטורים הבינאריים באורך n: $\boxed{2^n}$ (עקרון הכפל).
2. מס' האפשרויות לסדר מורה ו-n תלמידים בשורה: $\boxed{(n+1)!}$
3. מס' תוצאות הגרלת הלוטו האפשריות, אם צריך לנחש 6 מס' מתוך שלושים: $\boxed{\binom{30}{6}}$
4. מס' האפשרויות לבחור את הזוכים בשלושת המקומות הראשונים מתוך כיתה של 50 אנשים. $\frac{50!}{47!}=\boxed{50\cdot 49\cdot 48}$

תרגילים:

להושיב n אנשים במעגל: $(n-1)!$

<u>תרגיל 1</u>: במשפחה יש אבא, אמא ו-k ילדים.

(1) מהו מס' הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול?

<u>פתרון ראשון</u>: נושיב את האמא, ואז יש $(k+1)!$ לסדר את השאר. סה"כ $(k+1)!$ אפשרויות.

<u>פתרון שני</u>: נסדר את כולם בשורה $(k+2)!$. נחלק במס' הסיבובים האפשריים, סה"כ $\frac{(k+2)!}{k+2}=(k+1)!$

(2) מהו מס' הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול, כאשר לאבא מקום ישיבה קבוע?

<u>פתרון</u>: נושיבו במקום הקבוע ונסדר את השאר ביחס אליו, סה"כ: $(k+1)!$

(3) מהו מס' הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול, כאשר האב והאם יושבים תמיד ביחד?

<u>פתרון</u>: נתייחס לאב ולאם כישות אחת, כלומר נסדר $k+1$ אנשים במעגל $= k!$ אפשרויות, לאחר מכן "נכניס סדר" בין האב לאם, קיבלנו $2!\cdot k!=2k!$

(4) מהו מס' הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר אסור לשני ההורים לשבת ביחד?

<u>פתרון</u>: נחשב ע"פ מאורע משלים - ע"פ הסעיפים הקודמים: $(k+1)!-2k!=(k-1)\cdot k!$

תרגיל 2:

כמה אפשרויות יש להושיב n אנשים על הספסל, אם:

① צביקה רואה את רוני מימינו?

פתרון: נבחר שני מקומות לצביקה ורוני: $\binom{n}{2}$. כעת נסדר את יתר ה-$n-2$ האנשים: $(n-2)!$

סה"כ: $\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!} = \frac{n!}{2}$

הבהרה: סה"כ יש $n!$ דרכים, מהן או שרוני מימין לצביקה או שרוני משמאלו. סה"כ יוצא: $\frac{n!}{2}$.

② צביקה רואה את רוני מימינו ומוטי רואה את ריטה משמאלו:

פתרון: $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)! = \frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-2)!}}{2!\cancel{(n-4)!}}\cdot\cancel{(n-4)!} = \frac{n!}{4}$

③ אם רואה את צביקה ורני משמאלו?

נבחר 3 מקומות וכעת יש 2 אפשרויות סידור חוקיות לצביקה ורני $2\cdot\binom{n}{3}$

ונסדר את היתר, סה"כ: $\binom{n}{3}\cdot 2\cdot(n-3)! = \frac{2\cdot n!}{3!} = \frac{n!}{3}$

משפט: מס' האפשרויות לסידור עצמים עם חזרות כאשר יש:

q_1 עצמים מסוג ראשון

q_2 עצמים מסוג שני

⋮

q_t עצמים מסוג t

הוא: $\boxed{\frac{(q_1+q_2+\dots+q_t)!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_t!}}$

דוגמא: סידור 6 כדורים בשורה כך שיש 2 אדומים, 2 כחולים, 2 שחורים: $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}$

משפט: הבעיות הבאות שקולות, ולכולן $\boxed{S(n,k)=\binom{n+k-1}{k}}$ אפשרויות:

(1) בחירה של k מתוך n סוגים עם חזרות כאשר הסדר לא חשוב

(2) חלוקת k כדורים זהים ל-n תאים שונים

(3) מס' הפתרונות של המשוואה: $x_1+x_2+\dots+x_n = k$ כאשר $x_i\in\mathbb{N}$ לכל i.

תרגיל 3:

נתונות האותיות A,B,C,D, כל אחת 4 פעמים. כמה מילים בנות 10 אותיות ניתן ליצור מהן אם כל אות צריכה להופיע פעמיים לפחות?

פתרון: נפריד לשני מקרים: ① אות אחת מופיעה 4 פעמים, ישנן 4 אפשרויות לבחור את האות, ואז נסדר את האותיות, סה"כ: $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 4!}\cdot\binom{4}{1} = \frac{10!}{2\cdot 4!}$

② שתי אותות מופיעות 3 פעמים, והיתר פעמיים: $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\binom{4}{2} = \frac{6\cdot 10!}{3!\cdot 2\cdot 2}$

בסידור שרירותי מתאים לאחד מהמקרים הנ"ל, לכן סה"כ: $\frac{10!}{2\cdot 4!}+\frac{10!}{4\cdot 3!}$

המשך תרגול 10 בדידה 8

תרגיל 4: יש ערימה של כדורים: אדומים, כחולים וסגולים. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוכם 10 כדורים כך ש- (1) בהכרח יהיו לפחות 5 ~~כדורים~~ אדומים

(2) בהכרח יהיו לכל היותר 4 אדומים.

פתרון:

(1) נבחר תחילה 5 אדומים. כעת, נותר לבחור עוד 5 כדורים מתוך 3 סוגים:

סה"כ: $\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5}$

(2) בהכרח יהיו לכל היותר 4 אדומים. פתרון: נפתור את המשלים.

סה"כ: $\binom{10+3-1}{10} - \binom{5+3-1}{5} = \binom{12}{10} - \binom{7}{5}$

תרגיל 5: בבחירות לפרלמנט שבו $2n+1$ מושבים משתתפות 3 מפלגות שונות. כמה ~~בחירות~~ חלוקות שונות של המושבים יגרמו לכך שלאף קואליציה של שתי מפלגות יהיה רוב?

פתרון: תנאי מספיק והכרחי לכך הוא שכל מפלגה תקבל לכל היותר n קולות.

דרך א': • מס' האפשרויות לחלוקה כללית היא כמו לחלק $2n+1$ כדורים ל-3 תאים שונים. סה"כ: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1}$

• נחשב את האפשרויות לכך שקיימת מפלגה בעלת לפחות $n+1$ קולות. נבחר אותה ואז נותרו לנו לחלק n קולות בין 3 מפלגות: $\binom{3}{1} \cdot \binom{n+3-1}{n}$

$\Leftarrow$ סה"כ מס' האפשרויות: $\binom{2n+3}{2n+1} - 3 \cdot \binom{n+2}{n}$

דרך ב': הפתרון שקול למציאת פתרון למשוואה: $x_1+x_2+x_3 = 2n+1$ כך ש- $0 \le x_i \le n$ $\in \mathbb{N}$

נציב $x_i = n - y_i$. כעת הבעיה שקולה למציאת את מס' הפתרונות למשוואה:

כאשר $0 \le y_i \le n$: $3n - (y_1+y_2+y_3) = 2n+1 \Rightarrow n-1 = y_1+y_2+y_3$

אבל: אך כעת האילוץ חסר משמעות, סה"כ מס' הפתרונות הוא: $\binom{n-1+3-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$

תרגיל 8: הוכיחו: $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}7^i = 7n \cdot 8^{n-1}$

פתרון - דרך א': הבעיה: מס' החלוקות של n אנשים לוועדה עם יו"ר, כך שלכל חבר בוועדה יש דירוג מ-1 עד 7.

צד ימין: נבחר יו"ר (n אפשרויות), ניתן לו דירוג (7 אפשרויות)

לאחר מכן נותרו $n-1$ אנשים כך שכל אחד - או שאינו בוועדה או שיש לו דירוג מ-1 עד 7:

8^{n-1} אפשרויות. סה"כ: $7 \cdot n \cdot 8^{n-1}$.

צד שמאל: ה-i יציין את מס' האנשים בוועדה, נבחר את האנשים בוועדה $\binom{n}{i}$

נבחר יו"ר - i, ~~לבחירה~~ לצבע: 7^i. סה"כ: $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}7^i$.

תרגיל 9: הוכיחו קומבינטורית: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-i}=2^n-n-1$

הגדרה: מס' הוקטורים הבינאריים באורך n, בהם לפחות 2 "1"-ים.

צד ימין - מס' הוקטורים הכולל: 2^n. מתוכם נחסיר את הוקטור שכולו אפסים,

ואת הוקטור עם אחד "1" בדיוק: 2^n-n-1.

צד שמאל - נסמן ב-i את "המיקום" של ה-"1" השני משמאל בוקטור.

נבחר את ה-"1" הראשון משמאל - $i-1$ אפשרויות, ואז נבחר בחופשיות את

יתר המקומות - 2^{n-i}. סה"כ: $\sum_{i=2}^{n}(i-1)2^{n-i}$.