בדידה - תרגול 6

תכונות יחסים:

רפלקסיבי: יחס $S\subseteq A\times A$ הוא רפלקסיבי אם $\forall x\in A. \langle x,x\rangle\in S$

סימטרי: יחס $S\subseteq A\times A$ הוא סימטרי אם $\forall a,b\in A. \langle a,b\rangle\in S\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in S$

מסקנה: $S=S^{-1}$

אנטי סימטרי: יחס $S\subseteq A\times A$ הוא אנטי סימטרי אם: $\forall a,b\in A. (\langle a,b\rangle\in A\wedge\langle b,a\rangle\in A)\Rightarrow a=b$

טרנזיטיבי: יחס $S\subseteq A\times A$ הוא טרנזיטיבי אם: $\forall a,b,c\in A. (\langle a,b\rangle\in S\wedge\langle b,c\rangle\in S)\Rightarrow\langle a,c\rangle\in S$

מסקנה: $S\circ S\subseteq S$

תרגיל 1:

יהי $S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid x+y$ זוגי$\}$ צ"ל: S $\underbrace{\text{רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי}}$ יחס שקילות

פתרון: * רפלקסיבי: לכל $a\in\mathbb{N}$ מתקיים: $a+a=2a$ זוגי $\Leftarrow$ $\langle a,a\rangle\in S$.

* סימטרי: לכל $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש- $a+b$ זוגי מתקיים $b+a\overset{\text{קומוטטיבי}}{=}a+b \Rightarrow \langle b,a\rangle\in S$

* טרנזיטיבי: נקח $a,b,c\in\mathbb{N}$ כך ש- $\langle a,b\rangle\in S$ כלומר קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a+b=2n$.

בדומה $\langle b,c\rangle\in S$ כלומר קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $b+c=2m$

מכאן, $a=2n-b$, $c=2m-b$ $\Leftarrow$ $a+c=2n+2m-2b=2(n+m-b)$

$\Leftarrow$ זוגי ולכן $\langle a,c\rangle\in S$.

תרגיל 2:

יהיו R,S יחסים טרנזיטיביים. הוכח/הפרך:

① $R\cap S$ טרנזיטיביים ② $R\cup S$ טרנזיטיבי

פתרון:

① נכון. לכל $x,y,z\in A$: $(\langle x,y\rangle\in R\cap S)\wedge(\langle y,z\rangle\in R\cap S)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S)\wedge(\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in S)$

$\overset{\text{טרנז' } R,S}{\Rightarrow}(\langle x,z\rangle\in R)\wedge(\langle x,z\rangle\in S)\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\cap S$

② לא נכון. דוגמה נגדית: $R=\{\langle1,2\rangle,\langle2,1\rangle,\langle1,1\rangle,\langle2,2\rangle\}$ - טרנזיטיבי, $S=\{\langle1,3\rangle\}$ - טרנזיטיבי (באופן ריק)

אבל: $R\cup S=\{\langle1,2\rangle,\langle2,1\rangle,\langle1,1\rangle,\langle2,2\rangle,\langle1,3\rangle\}$ אינו טרנזיטיבי

כי לדוגמה $(\langle2,1\rangle\wedge\langle1,3\rangle)\in R\cup S$ אבל $\langle2,3\rangle\notin R\cup S$

☒

תרגיל 3:

① הוכיחו כי $R,S\subseteq A\times A$ מתקיים: $\boxed{(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}}$

פתרון: לכל $x,y\in A$

$$\langle x,y\rangle\in(R\circ S)^{-1}\iff\langle y,x\rangle\in R\circ S$$

הנ"ל מתקיים אמ"מ: $\exists z\in A.\ \langle y,z\rangle\in S\wedge\langle z,x\rangle\in R$

$$\iff\exists z\in A.\ \langle z,y\rangle\in S^{-1}\wedge\langle x,z\rangle\in R^{-1}\iff\langle x,y\rangle\in S^{-1}\circ R^{-1}\ \blacksquare$$

② נתונים יחסים $R,S\subseteq A\times A$ שהם רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים שמקיימים $R\circ S=S\circ R$. צ"ל: $R\circ S$ רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי.

פתרון * רפלקסיביות: יהא $x\in A$. מרפלקסיביות R ו-S נקבל:

$\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in S\overset{\text{הגדרת ההרכבה}}{\Rightarrow}S\circ R\ni\langle x,x\rangle\in R\circ S$ לכן רפלקסיבי.

* סימטריות: מספיק להראות ש- $(R\circ S)^{-1}=R\circ S$ סימטריות R,S

ואכן: $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}\overset{\downarrow}{=}S\circ R\overset{\text{נתון}}{=}R\circ S$ כנדרש.

* טרנזיטיביות: מספיק להראות ש- $(R\circ S)\circ(R\circ S)\subseteq R\circ S$

ואכן מתקיים: $(R\circ S)\circ(R\circ S)\overset{\text{אסוציאטיבי}}{=}R\circ(S\circ R)\circ S\overset{\text{נתון}}{=}R\circ(R\circ S)\circ S\overset{\text{אסוציאטיביות של הרכבה}}{=}(R\circ R)\circ(S\circ S)\subseteq R\circ S$ כנדרש! $\blacksquare$

תרגיל 4:

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ והטענות הבאות:

① f הוא יחס טרנזיטיבי

② $f|_{Imf}=I_{Imf}$

③ $f=f\circ f$

④ $f=I_{\mathbb{R}}$ או $\exists c\in\mathbb{R}.f=\lambda x\in\mathbb{R}.c$

מצאו איזו טענה אינה שקולה לאחרות והוכיחו.

פתרון: נוכיח כי טענות 1,2,3 שקולות:

מתקיים כי פונקציה יחס מלא

(א) נראה כי 1 שקולה את 3: יהא f טרנזיטיבי, כלומר יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך שלום

$\langle a,b\rangle\in f$ ואם $\langle b,c\rangle\in f\Rightarrow\langle a,c\rangle\in f$. מכך ש-$f$ היא פונקציה:

$b=f(a)$ ו- $c=f(b)$ לכן $c=f(f(a))$. מהטרנזיטיביות $\langle a,c\rangle\in f\Rightarrow f(a)=c$

קיבלנו, $f(f(a))=(f\circ f)(a)=f(a)$. מכאן $f\circ f=f$.

(ב) נראה כי 3 גוררת את 2: יהא $x\in Imf$ כלומר: $\exists a\in\mathbb{R}.\ f(a)=x$

אזי לפי הגדרת הפונק' המצומצמת: $f|_{Imf}(x)=f(x)=f(f(a))=f\circ f(a)\overset{\text{לפי 3}}{=}f(a)=x$ כלומר זו הזהות

(ג) נראה כי 2 גוררת את 1: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $\langle a,b\rangle\in f\wedge\langle b,c\rangle\in f$. אזי

$f(a)=b$, $f(b)=c$. מכך ש- $f(a)\in Imf$ מ-2 נקבל: $f(f(a))=f(a)$. כלומר:

$f(a)=c$ ומכאן: $\langle a,c\rangle\in f$ ו-f טרנזיטיבי.

המשך תרגול 6 בדידה:

המשך תרגיל 4:

נרצה להראות ש-4 לא שקול לשלושת הקודמים. נקח $f=\lambda x\in\mathbb{R}.|x|$

f אינה על $\mathbb{R}$ כי לדוגמא $f(-3)\neq -3$ (אינה הזהות), אך:

$$\forall x.\ f(f(x))=f(|x|)=||x||=|x|=f(x)$$

⇐ f מקיימת את 3 ומכאן גם את 1 ו-2 אבל לא את 4 $\blacksquare$

הגדרה: יחס R הוא יחס סדר חלקי אם R הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

לדוגמא: $R=\{\langle m,n\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid m|n\}$

m מחלקת את n

הגדרה: יחס R הוא יחס סדר מלא אם R הוא יחס סדר חלקי ומלא: $\forall a,b\in A.\ \langle a,b\rangle\in R \vee \langle b,a\rangle\in R$

תרגיל 5:

תהא A קבוצה ונגדיר פעולה בינארית חדשה * כך שלכל $a,b,c\in A$:

① $a*a=a$ ② $a*b=b*a$ ③ $a*(b*c)=(a*b)*c$

נגדיר יחס: $R=\{\langle a,b\rangle\in A\times A \mid a*b=a\}$. הוכיחו כי R יחס סדר חלקי:

פתרון: * רפלקסיביות: לפי ①. $\forall a\in A.\ a*a=a\Rightarrow \langle a,a\rangle\in R$

* אנטי-סימטריות: יהיו $a,b\in A$ כך ש $\langle a,b\rangle\in R \wedge \langle b,a\rangle\in R$

מתקיים: $a*b=a$ וגם $b*a=b$ אבל: $a*b=b*a\Rightarrow a=b$

* טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in A$ כך ש- $\langle a,b\rangle\in R \wedge \langle b,c\rangle\in R$

אזי $a*b=a \wedge b*c=b$ כלומר: $a*(b*c)=a$

ולפי התכונה השלישית: $\langle a,c\rangle\in R \Leftarrow a=a*(b*c)=(a*b)*c \overset{\text{נתון}}{=} a*c$ $\blacksquare$

(ב) תנו דוגמא לקבוצה A ופעולה * כך ש-R אינו יחס סדר מלא.

דוגמא: נקח $*=\cap$ ו- $A=P(\mathbb{N})$, והיחס: $R=\{\langle A,B\rangle\in P(\mathbb{N})^2 \mid A\cap B=A\}$

$R=\{\langle A,B\rangle\in P(\mathbb{N})^2 \mid A\subseteq B\}$

ו-R אינו יחס סדר מלא כי לדוגמא $\{1,3\}\not\subseteq\{1,2\} \wedge \{1,2\}\not\subseteq\{1,3\}$.