בדידה תרגול 7

הגדרה: R הוא יחס שקילות אם הוא: *רפלקסיבי *סימטרי *טרנזיטיבי

הגדרה: יהא S יחס שקילות בקבוצה A ונניח $x\in A$. מחלקת השקילות של x לפי S היא הקבוצה: $[x]_S=\{y\in A \mid \langle x,y\rangle\in S\}$

הגדרה: יהא S יחס שקילות בקבוצה A. קבוצת המנה של A לפי S היא הקבוצה $A/S=\{[x]_S \mid x\in A\}$

דוגמא: $S=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid n\equiv m \pmod 3\}$

* $[4]_S=\{y\in\mathbb{N} \mid y\equiv 1 \pmod 3\} \Leftrightarrow [4]_S=\{y\in\mathbb{N} \mid \langle 4,y\rangle\in S\}$
* $\mathbb{N}/S=\{[0]_S,[1]_S,[2]_S\}$

תרגיל 1: יהא $S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid x+y$ זוגי$\}$ (הוכחנו בשיעור שעבר שהוא שקילות)

יהא $x\in\mathbb{N}$. $[x]_S=\{y\in\mathbb{N} \mid x+y$ זוגי$\}$

אם x זוגי אז $[x]_S=\mathbb{N}_{even}$, ואם x אי-זוגי אז $[x]_S=\mathbb{N}_{odd}$

⇐ קבוצת המנה: $\mathbb{N}/S=\{\mathbb{N}_{even},\mathbb{N}_{odd}\}$.

תרגיל 2: יהא $S\subseteq(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ יחס שקילות כך ש- $S=\{\langle\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\rangle \mid x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\}$

1. מהי מחלקת השקילות של $\langle 2,3\rangle$?
2. מהי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$?

פתרון:

1. (לדוגמא $\langle 0,\sqrt{13}\rangle\in$) $[\langle 2,3\rangle]_S=\{\langle x,y\rangle \mid x^2+y^2=13\}$ ← כלומר, אלו הנק' במישור שמתארות מעגל קנוני ברדיוס $\sqrt{13}$.
2. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/S=\{[\langle 0,r\rangle]_S \mid r\in\mathbb{R}^+\}$ כאשר $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$.

עוצמות

הגדרה: הקבוצות A,B הן שוות עוצמה, $|A|=|B|$, $A\sim B$ אם קיימת פונקציית שקילות ביניהן.

דוגמאות: 1. $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_{even}|$ - כי קיימת פונקציית השקילות $\lambda n\in\mathbb{N}.2n$

2. לכל קבוצה E, $|P(E)|=|E\to\{0,1\}|$: $\lambda A\in P(E).\chi_A^{(E)}$

לדוגמא: $E=\{1,2,3\}$, $f=\lambda A\in P(E).\chi_A^{(E)}$, $f(\{1,2\})=\lambda a\in\{1,2,3\}.\begin{cases}0 & a\notin\{1,2\}\\ 1 & a\in\{1,2\}\end{cases}$

הפונקציה המציינת $\chi_A^{(E)}$:

$$\chi_A^{(E)} = \lambda a\in E.\begin{cases}0, & a\notin A\\ 1, & a\in A\end{cases}$$

טענה: אם A,B סופיות, אזי: $|A\times B| = |A|\cdot|B|$

$|A\to B| = |B|^{|A|}$

אם $A\cap B=\emptyset$ אזי: $|A\cup B| = |A|+|B|$

הגדרה: • $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ - הקבוצות בנות מניה. הקבוצות מסוג הקורס (זה אין בנות מניה)

• $|\mathbb{R}| = \aleph$

הגדרה: נסמן ב- B^A את קב' הפונקציות $A\to B$

תרגיל 3: תהיינה A,B,A',B' קבוצות כך ש- $A\cap B=\emptyset$, $A'\cap B'=\emptyset$

וגם $|A|=|A'|$; $|B|=|B'|$. הוכיחו כי $|A\cup B| = |A'\cup B'|$

פתרון:

מהגדרת שוויון עוצמות קיימות $f:A\to A'$, $g:B\to B'$ פונקציות הפיכות

~~הפיכות~~. נגדיר $h:(A\cup B)\to(A'\cup B')$ כך ש-

$$h = \lambda x\in A\cup B.\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g(x), & x\in B\end{cases}$$

הפונק' מוגדרת היטב שכן $A\cap B=\emptyset$. נרצה להראות כי h הפיכה:

⊛ חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A\cup B$ כך ש- $h(x_1)=h(x_2)$. נפריד למקרים:

• $x_1\in A \wedge x_2\in A \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ מכך ש- f חח"ע נובע ש- $x_1=x_2$.

• $x_1\in B \wedge x_2\in B \Rightarrow g(x_1)=g(x_2)$ מכך ש- g חח"ע נובע ש- $x_1=x_2$.

• בה"כ $x_1\in A, x_2\in B \Rightarrow \underset{A'}{f(x_1)} = \underset{B'}{g(x_2)}$ אך זה בלתי אפשרי כי $A'\cap B'=\emptyset$!

⊛ על: יהא $y\in A'\cup B'$ נפריד למקרים:

• אם $y\in A'$ אז קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=y \Rightarrow h(x)=y$ כנדרש.

• אם $y\in B'$ אז קיים $x\in B$ כך ש- $g(x)=y \Rightarrow h(x)=y$

■

המשך בדידה 7 8

תרגיל 4: הראו כי $|\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+| = |\mathbb{N}^+|$

פתרון: נראה פונקציה $f: \mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ שהיא חח"ע

$$f = \lambda m\in\mathbb{N}^+, n\in\mathbb{N}^+ .\ 2^{m-1}(2n-1)$$

מהגדרת הטווח של f הוא $\mathbb{N}^+$. נוכיח ש- f חח"ע.

* חח"ע - ניקח $\langle a,b\rangle, \langle m,n\rangle \in (\mathbb{N})^2$ כך ש- $2^{a-1}(2b-1) = 2^{m-1}(2n-1)$. נפריד למקרים:

- $m=1$ וגם $a=1$: $2b-1=2n-1 \Rightarrow b=n$
- $m=1$ אך $a\neq 1$: $2^{a-1}(2b-1)=2n-1 \Rightarrow$ לא ייתכן כי זוגי = אי-זוגי. בה"כ
- $m\neq 1$ וגם $a\neq 1$: בפרט $\underset{a=m}{2^{a-1}=2^{m-1}}$ וגם $\underset{b=n}{2b-1=2n-1}$ לפי משפט הפירוק היחיד (לראשוניים)

בסה"כ $a=m$, $b=n \Rightarrow \langle a,b\rangle=\langle m,n\rangle$ כנדרש!

* על - יהא $n\in\mathbb{N}^+$. ניתן לכתוב אותו כ- $n=2^a\cdot b$ כאשר $b\in\mathbb{N}^+$ אי-זוגי ו- $a\in\mathbb{N}$

נשים לב ש- $\langle a+1, \frac{b+1}{2}\rangle\in(\mathbb{N}^+)^2$. $f(\langle a+1,\frac{b+1}{2}\rangle) = 2^{a-1+1}\cdot(2\frac{b+1}{2}-1) = 2^a\cdot b = n$

$\Downarrow$

f על ■

תרגיל 7: תהיינה הקבוצות A,B,C כך ש- $B\cap C=\emptyset$. הוכיחו:

$$|A^B\times A^C| = |A^{B\cup C}|$$

פתרון: נמצא פונקציית שקילות $H: A^B\times A^C\to A^{B\cup C}$

$$H = \lambda\langle f,g\rangle\in A^B\times A^C .\ \lambda x\in B\cup C .\ \begin{cases} f(x) & x \text{ שייך ל-} B \\ g(x) & x \text{ שייך ל-} C\end{cases}$$

הפונק' מוגדרת היטב שכן $B\cap C=\emptyset$. נמצא פונקציה הופכית $H^{-1}: A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$.

$$H^{-1}=\lambda h\in A^{B\cup C}.\ \langle h|_B, h|_C\rangle$$

הוכיחו כי $H^{-1}\circ H = id$ ו- $H\circ H^{-1}=id$, ומכאן H פונק' שקילות.

תרגיל 8: תהא $M\subseteq\mathbb{N}$. נגדיר יחס R מעל $P(M)$ באופן הבא:

$$R=\{\langle M_1,M_2\rangle\in P(M)\times P(M) \mid |M_1|=|M_2|\}$$

① אם M סופית מצא מחלקות השקילות, קב' המנה ועוצמת קב' המנה.

② כנ"ל לגבי M אינסופית ($|M|=\aleph_0$)

פתרון:

① נניח $|M|=d$ כאשר $d\in\mathbb{N}$. נסמן $M_i=\{A\in P(M)\mid |A|=i\}$

מתקיים: כל מחלקות השקילות של R הן M_i עבור $0\le i\le d$, כאשר $M_0=\{\emptyset\}, M_d=\{M\}$

$\Rightarrow$ $P/_M=\{M_i\mid 0\le i\le d\}$ ועוצמתה $|P/_M|=d+1$

המשך תרגיל 8:

② תהא $A \subseteq M$. אם A סופית, $|A|=k$ עבור $k\in\mathbb{N}$ אז $[A]_R=M_k$

אם A אין סופית. $A\subseteq M\subseteq \mathbb{N}$, אז עוצמתה של A היא $\aleph_0$. (נוכיח בשיעור $\aleph_0$ היא העוצמה האין סופית המינימלית)

בפרט $|A|=|M|$. $[A]_R=[M]_R$.

באופן כללי $P(M)/R=\{[M_i] \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{[M]_R\}$ $\Leftarrow$ $|P(M)/R|=\aleph_0$.

תרגיל 9:

חשבו את העוצמה של קב' הסדרות החשבוניות של הטבעיים.

פתרון: $\aleph_0$. כל סדרה היא מהצורה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(i)=a_0+d\cdot i$

נגדיר פונק' שקילות $\Phi:\lambda f\in S.\langle f_0, f_1-f_0\rangle\in\mathbb{N}^2$. ($\Phi: S\longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$)