בדידה תרגול 8

הגדרה: נאמר ש- $|A|\le|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ שהיא חח"ע, או לחילופין $g:B\to A$ שהיא על.

משפט: אם $A\subseteq B$ אזי $|A|\le|B|$

משפט (קנטור-שרדר-ברנשטיין): $|A|\le|B| \wedge |B|\le|A| \Rightarrow |A|=|B|$

משפט: היחס $\le$ על עוצמות הוא סדר חלקי

תרגיל 2: הוכח ע"י לכסון כי $|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|\neq\aleph_0$

פתרון: נניח בשלילה כי $|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$, לכן קיימת $f:\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N})$ שהיא על $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. מתקיים:

$f(0)=(f(0))(0),(f(0))(1),(f(0))(2),\dots$
$f(1)=(f(1))(0),(f(1))(1),(f(1))(2),\dots$
$\vdots$

כדי להגיע לסתירה, נבנה לכסון $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך שלכל $i\in\mathbb{N}$, $f(i)\neq g$.

נגדיר: $g:\lambda n\in\mathbb{N}.(f(n))(n)+1$, אזי: נניח שקיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(k)=g$

$\Downarrow$

$(f(k))(k)=g(k)=(f(k))(k)+1$

סתירה!

תרגיל 3: הוכיחו:

1. תהיינה a,b עוצמות. אם $a\le b$ אז קיימות קבוצות A,B כך ש- $|A|=a$, $|B|=b$ ו- A שוות עוצמה לקבו' חלקית כלשהי של B.

פתרון:

יהיו A ו- B כך ש- $|A|=a$ ו- $|B|=b$ ולפי הגדרה קיימת פונק' $f:A\to B$ שהיא חח"ע. מתקיים $Imf\subseteq B$, לכן f היא על Imf (כלומר f שקילות A ל- Imf) ומכאן ש- $|A|=|Imf|$ כנדרש.

2. תהיינה a,b עוצמות. $a\le b \Leftrightarrow$ קיימות A,B כך ש- $|A|=a$, $|B|=b$ ו- $A\subseteq B$.

פתרון: $\boxed{\Leftarrow}$ לפי סעיף 1.

$\boxed{\Rightarrow}$ קיימות A, B כך ש- $|A|=a$, $|B|=b$ ו- $A\subseteq B$.

אם $A=\emptyset$ סיימנו. אחרת, קיים $x\in A$. נגדיר $g:B\to A$ כך:

$$g=\lambda y\in B.\begin{cases} y & y\in A\\ x & y\notin A\end{cases}$$

g על A ולכן $a\le b$.

תרגיל 4: נגדיר יחס S ע"י: $S=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x-y\in\mathbb{Q}\}$

1) הוכיחו: S יחס שקילות.

2) תהא $T=\mathbb{R}/S$. נניח כי קיימת פונק' מ-T ל-$\mathbb{R}$ המתאימה לכל מחלקת שקילות איבר מתוכה. הוכיחו: $|T\times\mathbb{Q}|=\aleph$

3) הוכיחו כי $|T|\geq\aleph_0$.

פתרון:

1) * רפלקסיביות: יהא $a\in\mathbb{R}$. מתקיים ש- $a-a=0\in\mathbb{Q}$ לכן $\langle a,a\rangle\in S$.

* סימטריות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $(a-b)\in\mathbb{Q}$. לכן $-(a-b)\in\mathbb{Q}$ - הרציונליים סגורים לנגדי. קיבלנו $b-a\in\mathbb{Q}$ ולכן $\langle b,a\rangle\in S$.

* טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $\langle a,b\rangle\in S$, $\langle b,c\rangle\in S$.

מכאן ש- $(a-b),(b-c)\in\mathbb{Q}$ ומכיוון שהרציונליים סגורים לחיבור: $a-b+b-c=a-c\in\mathbb{Q}$ ✓

2) יהא $x\in\mathbb{R}$. $[x]_S=\{y\in\mathbb{R}\mid \underbrace{x-y}_{q}\in\mathbb{Q}\}=\{x-q\mid q\in\mathbb{Q}\}$

נראה כי $|[x]_S|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$. תהא $f:T\to\mathbb{R}$ כך שלכל $[x]_S\in T$, $f([x]_S)$ מחזירה איבר אחד מ-$[x]_S$.

נגדיר פונק' $h:(T\times\mathbb{Q})\to\mathbb{R}$ כך: $h=\lambda X\in T, q\in\mathbb{Q}.\ f(X)+q$

נוכיח כי h הוא חח"ע ועל.

* נוכיח h חח"ע: יהיו $[x]_S,[y]_S\in T$ ו- $q_1,q_2\in\mathbb{Q}$ כך ש- $f([x]_S)+q_1=f([y]_S)+q_2$

מכאן: $f([x]_S)-f([y]_S)=q_2-q_1\in\mathbb{Q}$ מכאן ש- $\langle f([x]_S),f([y]_S)\rangle\in S$ כלומר

$[f([x]_S)]_S=[f([y]_S)]_S$ ולכן, $f([x]_S)=f([y]_S)$ (נראה כי f חח"ע).

כלומר $f([x]_S)=f([y]_S)=a$ מתקיים $\langle x,a\rangle\in S \wedge \langle y,a\rangle\in S$ ולכן $\langle x,y\rangle\in S$

לכן $[x]_S=[y]_S$. מכאן, $q_1-q_2=0$ ולכן $q_1=q_2$ ו- h חח"ע.

* נוכיח h על: יהא $x\in\mathbb{R}$. (נבחר $q=x-f([x]_S)$). אזי:

$h(\langle [x]_S,q\rangle)=f([x]_S)+q=f([x]_S)+x-f([x]_S)=x$

לכן h על.

3) נמצא $g\in\mathbb{Q}\to T$ שהיא חח"ע ואז $\aleph_0=|\mathbb{Q}|\le T$.

(נגדיר: $g=\lambda x\in\mathbb{Q}.[\pi x]_S$. יהיו $q_1,q_2\in\mathbb{Q}$ כך ש- $g(q_1)=g(q_2)$

אזי: $[\pi q_1]_S=[\pi q_2]_S$ ומכאן $\langle \pi q_1,\pi q_2\rangle\in S$. קיבלנו: $\pi q_1-\pi q_2\in S$,

$\pi(q_1-q_2)\in S$ ובהכרח $q_1=q_2$ כנדרש.

■

המשך תרגול 8 בדידה:

תרגיל 5: נגדיר פונקציה $H=\lambda f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\left(\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f(y,x))^3\right)$

1. מה הטווח של H? $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2. הוכח/הפרך: H היא פונק' שקילות.

הטענה נכונה: * חח"ע: יהיו $f,g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $H(f)=H(g)$

כלומר: $\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f(y,x))^3=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(g(y,x))^3$. כלומר לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$(f(y,x))^3=(g(y,x))^3$, אבל העלאה בשלישית היא שקילות ולכן לכל x,y: $f(y,x)=g(y,x)$

ומהגדרת שוויון פונק' $f=g$.

* על: יהי $g:(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to\mathbb{R}$. נגדיר $f=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\sqrt[3]{g(y,x)}$

מתקיים: $H(f)=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(\sqrt[3]{g(y,x)})^3=\lambda x,y\in\mathbb{R}.g(y,x)=g$ כנדרש.

3. מצא את $|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$

4. מצא את $|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$

פתרון:

3. מצד אחד, $\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ ולכן: $|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|\le|\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}|=$
$=(\aleph_0)^{\aleph}=2^{\aleph}$

מצד שני נגדיר את הפונקציה: $G=\lambda h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}.\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.\begin{cases}h(x) & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$

$|\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}|=|\mathbb{Q}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}$

נרצה להראות כי $G\in(\mathbb{R}\to\{0,1\})\to\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}$.

לכל $h\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$: $H(G(h))=\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(G(h)(y,x))^3=\lambda x,y\in\mathbb{R}.\begin{cases}h(y)^3, & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}=$

$=\lambda x,y\in\mathbb{R}.\begin{cases}h(x) & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}=G(h)$

נוכיח ש- G חח"ע. יהיו $h_1,h_2\in\mathbb{R}\to\{0,1\}$ כך ש- $G(h_1)=G(h_2)$

בפרט, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים: $G(h_1)(x,x)=G(h_2)(x,x)$, ומכאן $h_1(x)=h_2(x)$ ולכן $h_1=h_2$.

מכך זה קיבלנו $2^{\aleph}=|\{0,1\}^{\mathbb{R}}|=|\mathbb{R}\to\{0,1\}|\le|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$.