

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 הצגות מושרות

בהינתן חבורות $H \leq G$, מגדירים את קוסטים של H להיות $\sigma = sH$ לכל $s \in G$, ואת G/H להיות קבוצת הקוסטים. כמובן,

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$$

אם G סופית.

בהנתן הצגה $\rho : G \rightarrow GL(V)$ של G ראינו שאפשר לצמצם:

$$\rho_H = \rho|_H : H \rightarrow GL(V)$$

יהי $s \in G$, ותהי W תת הצגה של ρ_H , כלומר תת מרחב $W \subseteq V$ ששמור תחת פעולת H . כמובן שהמרחב $\rho_s W \subseteq V$ תלוי רק בקוסט sH . נוכל להגדיר

$$W_\sigma = \rho_s W$$

עבור $s \in \sigma$ כלשהו (מוגדר היטב בכל מקרה). אזי

$$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

שמור תחת פעולת G .

הגדרה 1.1 הצגה ρ של G במרחב V נקראת מושרית על ידי הצגה θ של H במרחב W אם

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

וכמובן שמתקיים

$$\dim V = \dim W \cdot [G : H]$$

דוגמאות

1. תהי V ההצגה הרגולרית של G , כלומר עם בסיס $(e_t)_{t \in G}$, ועם הפעולה

$$\rho_s e_t = e_{st}$$

המרחב $W = \text{span}(e_t)_{t \in H}$ נשמר תחת H , וכמובן שההצגה V מושרית על ידי W , כאשר $W_\sigma = \langle e_s \mid s \in \sigma \rangle$.

2. ניקח מרחב V עם בסיס $(e_\sigma)_{\sigma \in G/H}$, ונגדיר

$$\rho_s e_\sigma = e_{s\sigma}$$

וזו כמובן מושרית על ידי ההצגה הטרויואלית במרחב $W = \mathbb{C}e_H$.

3. אם ρ_1, ρ_2 מושרות על ידי θ_1, θ_2 , אזי $\rho_1 \oplus \rho_2$ מושרית על ידי $\theta_1 \oplus \theta_2$.

4. אם (V, ρ) מושרית על ידי (W, θ) , $W_1 \subseteq W$ תת מרחב שמור תחת H , אזי

$$V_1 = \sum_{r \in R} \rho_r(W_1)$$

כאשר R קבוצת נציגים של G/H . אזי למעשה V_1 מושרית על ידי W_1 .

5. אם ρ_G מושרית על ידי θ של H , ρ' הצגה של G , ρ'_H הצמצום של (V', ρ') על H , אזי $\rho \otimes \rho'$ מושרית על ידי $\theta \otimes \rho'_H$ במרחב $W \otimes V'$, ששמור על ידי H , ואז $V = \bigoplus W_\sigma$, ואז

$$V \otimes V' = \bigoplus W_\sigma \otimes V'$$

1.1 קיום ויחידות

למה 1.2 נניח כי (V, ρ) מושרית על ידי (W, θ) . תהי $\rho' : G \rightarrow GL(V)$ הצגה של G , ותהי $f : W \rightarrow V'$ העתקה לינארית המקיימת

$$f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$$

לכל $t \in H$ ולכל $w \in W$. אזי קיימת ויחידה העתקה לינארית $F : V \rightarrow V'$ המרחיבה את f והמקיים $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ לכל $s \in G$.

הוכחה: אם F כזו ואם $x \in \rho_s W$, אזי $\rho_s^{-1} x \in W$. לכן

$$F(x) = F(\rho_s \rho_s^{-1} x) = \rho_s F(\rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x)$$

לכן F חייבת להיות מוגדרת באופן הזה, ולכן יחידה. כעת, יהי $x \in W_\sigma$. נבחר $s \in \sigma$ ונגדיר את F על W_σ על ידי

$$F(x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1}x)$$

זה לא תלוי בבחירת $s \in \sigma$ שכן אם $st \in \sigma$, אזי

$$\rho'_{st} f(\rho_{st}^{-1}x) = \rho'_s \rho'_t f(\theta_t^{-1} \rho_s^{-1}x) = \rho'_s f(\theta_t \theta_t^{-1} \rho_s^{-1}x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1}x)$$

■

משפט 1.3 תהי (W, θ) הצגה של H . אזי קיימת הצגה (V, ρ) של G המושרית על ידי (W, θ) , והיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הוכחה: קיום: לפי דוגמה 3 שלמעלה, ניתן להניח כי θ אי פריקה. במקרה זה θ תת הצגה של ההצגה הרגולרית של H . לכן אפשר להשרות את reg_H להצגה הרגולרית של G . לפי דוגמה 4, אפשר להשרות את תת ההצגה θ של reg_H . יחידות: תהיינה $(V, \rho), (V', \rho')$ שתי הצגות המושרות על ידי (W, θ) . נשתמש בלמה לגבי השיכון של W בתוך V' , ואנו רואים שקיימת העתקה לינארית $F : V \rightarrow V'$ בין ההצגות על W , שמקיימת

$$F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$$

לכל $s \in G$. כמוכן $\text{Im} F \supseteq W$, וכן לכל $\rho'_s W$, ולכן F על V' . אם כן, נקבל

$$\dim V = [G : H] \dim W = \dim V'$$

■

ולכן הן איזומורפיות.

משפט 1.4 תהי (W, θ) הצגה עם כרקטר χ_θ שמשרה את (V, ρ) עם הכרקטר χ_ρ . יהי $h = |H|$, ותהי R קבוצת נציגים של הקוסטים של H . אזי לכל $u \in G$ מתקיים

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ rhr^{-1} \in H}} \chi_\theta(rur^{-1}) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_\theta(s^{-1}us)$$

בפרט, $\chi_\rho(u)$ הוא סכום של χ_θ על החתוך של H עם המחלקה של u .

הוכחה: נכתוב $V = \bigoplus \rho_r W$. מתמיר את תתי המרחבים $\rho_r W$, כי ניתן לכתוב $ur = r_u t$, כאשר $r_u \in R, t \in H$, ואזי

$$\rho_u \rho_r W = \rho_{r_u} W$$

כמובן מתקיים

$$\chi_\rho(u) = \text{Tr}_V(\rho_u)$$

האינדקסים r עבורם $r_u \neq r$ לא נותנים דבר לעקבה - מרחב עובר למרחב אחר, לכן אין כניסות על האלכסון. כשזה כן קורה, למעשה מתקיים $\rho_u W_r = W_r$.
 כעת מתקיים

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \text{Tr}_{\rho_r W} \rho_{u,r}$$

כאשר $R_u = \{r \in R \mid r_u = r\}$, וכן $\rho_{u,r} = \rho_u |_{\rho_r W}$. נשים לב שמתקיים

$$r \in R_u \iff ur = rt, t \in H \iff r^{-1}ur = t \in H$$

לכן R_u הוא בדיוק חיתוך החלקה של u עם H . נותר לחשב את העקבה שבסכום.
 ρ_r נותן איזומורפיזם $W \cong \rho_r W$, ומתקיים

$$\rho_r \circ \theta_t = \rho_{u,r} \circ \rho_r$$

ניקח $t = r^{-1}ur$, ונקבל

$$\text{Tr}(\rho_{u,r}) = \text{Tr}(\theta_t) = \chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}ur)$$

אם $s \in G$, אזי $s = rt$ עבור אישהן $r \in R, t \in H$ עם

$$\begin{aligned} s^{-1}us &= t^{-1}(r^{-1}ur)t \\ \chi_\theta(s^{-1}us) &= \chi_\theta(r^{-1}ur) \end{aligned}$$

■

ולכן נקבל את הסכום שרצינו.

1.2 ההדדיות של פרובניוס

הנסוחה היא כזו:

$$(f_H, \chi_\theta)_H = (f, \chi_\rho)_G$$

כאשר f היא פונקציית מחלקות על G , וכן $f_H = f|_H$.

2 דוגמאות

1. ניקח C_n , חבורה ציקלית מסדרת n . אם r יוצר, אזי $r^n = 1$, וכל ההצגות חייבות להיות ממימד 1, כי החבורה אבלית. לכן ההצגות הן בדיוק

$$\text{Hom}(C_n, \mathbb{C}^*)$$

נניח כי

$$\begin{aligned}\rho &= \chi \\ \rho(r) &= W \in \mathbb{C}^* \\ r^n &= 1 \\ W^n &= \text{Id}\end{aligned}$$

כמו כן, כל W שהוא שורש יחידה מסדר n מגדיר הצגה של C_n . כלומר

$$W = e^{2\pi i \frac{h}{n}}$$

ואז מתקיים

$$\chi_n(r^k) = e^{2\pi i \frac{hk}{n}}$$

ואז הכרקטרים עצמם הם חבורה.

למשל, עבור $n = 3$, ניקח $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. החבורה הדיהדרלית D_n - ובה n סיבובים, n שיקופים. נוצרת על ידי

$$\begin{aligned}r^n &= 1 \\ s^2 &= 1 \\ srs^{-1} &= r^{-1}\end{aligned}$$

כל איבר ניתן לכתוב על ידי אחד מהבאים:

$$r^k, sr^k$$

עבור $0 \leq k < n$. תת חבורת הסיבובים היא C_n (ציקלית). כמו כן,

$$(sr^k)^2 = sr^k sr^k = (srs^{-1})^k r^k = (r^{-1})^k r^k = 1$$