

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

3 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 תהי G חבורה, ויהי V מרחב ווקטורי מעל שדה \mathbb{F} . הצגה של G היא פעולה (לא משנה אם שמאלית או ימנית, לרוב נעבוד עם שמאלית) של G על V על ידי העתקות לינאריות. הגדרה זו שקולה לקיום הומומורפיזם

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

הגדרה 0.2 תהיינה V_1, V_2 הצגות של חבורה G . הומומורפיזם של מרחבים ווקטוריים $T : V_1 \rightarrow V_2$ (העתקה לינארית) ייקרא הומומורפיזם של הצגות אם

$$\forall v \in V_1, g \in G \quad Tgv = gTv$$

הומומורפיזם כזה T ייקרא איזומורפיזם אם T חד-חד-ערכי ועל, ובמקרה $V_1 = V_2 = V$, זה שקול לכך שמתקיים

$$TgT^{-1} = g$$

הגדרה 0.3 יהי V מרחב הצגה של חבורה G . תת מרחב $W \subseteq V$ ייקרא אינווריאנטי אם לכל $g \in G$ ולכל $w \in W$ מתקיים $gw \in W$. כזה נקרא גם תת הצגה של G .

משפט 0.4 (Maschke) תהי G חבורה סופית, ותהי V הצגה ממימד סופי של G מעל \mathbb{C} . תהי $W \subseteq V$ תת-הצגה. אזי ישנה תת הצגה $U \subseteq V$ כך שמתקיים $V = W \oplus U$.

דוגמאות

1. יהי p ראשוני, וניקח $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. יהי $x \in G$ יוצר. נגדיר את ההצגה הבאה: x יפעל על \mathbb{C}^p על ידי הזזה ציקלית, כלומר

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$$

ברור כי $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\}$ היא תת הצגה, שנסמנה W . אם נגדיר

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^p x_i = 0 \right\}$$

אזי U היא גם כן תת הצגה. ואמנם מתקיים

$$V = \mathbb{C}^p = U \oplus W$$

2. תהי $D_{10} = \langle \rho, \varepsilon \mid \rho^5 = 1, \varepsilon^2 = 1, \rho\varepsilon = \varepsilon\rho^{-1} \rangle$ החבורה הדיאדרלית מסדר 10. נוכל לייצג את החבורה על ידי

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & -\sin \frac{2\pi}{5} \\ \sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נרצה למצוא את תתי ההצגות של הצגה זו. מעל \mathbb{R} , אין תתי הצגות לא טריוויאליות, שכן כל ישר יסובב לישר אחר. לעומת זאת, מעל \mathbb{C} , בתרגיל בית, נבדוק האם יש ווקטור עצמי משותף של ρ, ε , שייצג תת מרחב אינווריאנטי.

3. יהי $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = A^t\}$, ותהי $G = GL_n(\mathbb{C})$. נגדיר את ההצגה:

$$g(x) = gxg^t$$

נוודא שזו הצגה:

$$\begin{aligned} g(ax + by) &= g(ax + by)g^t = gaxg^t + gbyg^t = agxg^t + bgyg^t = \\ &= ag(x) + bg(y) \end{aligned}$$

$$(gh)(x) = ghx(gh)^t = ghxh^tg^t = gh(x)g^t = g(h(x))$$

ולכן זו אכן הצגה. מסלולי הפעולה הזו של G על V הם:

$$O_k = \{x \in V \mid \text{rk}(X) = k\}, 0 \leq k \leq n$$

בתרגיל הבית ניעזר בעובדה זו כדי להבין מהן תתי ההצגות (או ליתר דיוק, שאין כאלה לא טריוויאליות).

תרגיל הראו כי להצגה של $GL_n(\mathbb{R})$ במרחב \mathbb{C}^n אין תתי הצגות לא טריוויאליות.

פתרון תהי $U \neq \{0\}$ תת הצגה. יהי $u \in U, u \neq 0$. נסיק כי

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i u \in U$$

כאשר $m \in \mathbb{N}, g_i \in G, \lambda_i \in \mathbb{C}$. כתיבה אחרת ושקולה:

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i \right) u \in U$$

קל לראות כי הסכום שבסוגריים יכול לייצג כל מטריצה מרוכבת (ניתן להרכיב כל מטריצה מהבסיס הסטנדרטי של מרחב המטריצות בקלות). כלומר $M_n(\mathbb{C}) \subseteq \text{span}_{\mathbb{C}}(GL_n(\mathbb{R}))$. לכן U אינווריאנטי תחת $M_n(\mathbb{C})$ - ולכן בהכרח $U = \mathbb{C}^n$.