הצגות

טענה: תהי π הצגה פריקה לחלוטין של אלגברה A במרחב V. אז כל תת-הצגה וכל הצגת מנה של π פריקות לחלוטין.

הוכחה: $V=\bigoplus_{i\in I} V_i$ - V_i אי-פריקים.

יהי $U\le V$ תת-מרחב אינווריאנטי. ראינו כי ניתן לרשום $V=U\oplus\bigoplus_j V_{i_j}$ (*) עבור V_{i_j} כלשהם.

ניתן לשנות את סדר הסכימה:

$$V=\left(\bigoplus_{i\notin\{i_j\}} V_i\right)\oplus\left(\bigoplus_j V_{i_j}\right)$$

לפי הטענה האחרונה מההרצאה הקודמת,

$U\cong\bigoplus_{i\notin\{i_j\}} V_i$ כמודולים מעל A (מרחבי הצגה של A).

כלומר $\pi^U\cong\bigoplus_{i\notin\{i_j\}}\pi^{V_i}$.

כמו כן, לפי (*):

$$V/U\cong\bigoplus_j V_{i_j}$$

לכן $\bar\pi$ (הצגת המנה) שקולה ל- $\bigoplus_j \pi^{V_{i_j}}$ ופריקה לחלוטין.

משפט: יהי V מודול מעל אלגברה A. נניח כי נתונים שני פירוקים שלו:

$$V=V_1\oplus\dots\oplus V_k=U_1\oplus\dots\oplus U_l$$

כאשר V_i,U_j תת-מודולים אי-פריקים. אז $k=l$, ולאחר שינוי סדר: $V_i\cong U_i$.

הוכחה: נניח כי $1\le k\le l$. אם $k=1$, אז $V_1=U_1\oplus\dots\oplus U_l$.

כיוון ש- V_1 אי-פריק לה מח"ה ש- $l=1$ ואז $V=V_1=U_1$.

נניח כי $1<k$. נסמן $W=V_2\oplus\dots\oplus V_k$. אז יש תת-מודולים $U_{i_1},\dots,U_{i_r}$ עם $V=W\oplus U_{i_1}\oplus\dots\oplus U_{i_r}$.

כיוון ש: $V=W\oplus V_1$, $V=\left(\bigoplus_{i\notin\{i_j\}} U_i\right)\oplus U_{i_1}\oplus\dots\oplus U_{i_r}$

מתקיים עפ"י אותה טענה מההרצאה הקודמת נקבל: $V_1\cong U_{i_1}\oplus\dots\oplus U_{i_r}$, ומבסיס האינדוקציה $r=1$ ו- $V_1\cong U_{i_1}$.

ע"י סידור אינדקסים מחדש נניח כי $i_1=1$, ואז:

$$V=W\oplus U_{i_1}\oplus\dots\oplus U_{i_r}=W\oplus U_1=U_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k$$

נמשיך באינדוקציה לפרק את המחוברים בצד אחר כך.

Scanned by CamScanner

הגדרה: תהי A אלגברה עם 1 מעל שדה F. נאמר כי A פשוטה למחצה (semisimple) אם אפשר לכתוב $A=\sum J_\alpha$ כאשר J_α אידאלים שמאליים מינימליים.

הערה: הסכום מהגדרה סופי. נכתוב:

$$1=\sum_{i=1}^N e_i \quad , \quad e_i\in J_i$$

לכן, לכל $a\in A$: $a=\sum_{i=1}^N \underbrace{ae_i}_{\in J_i}$.

מכאן, $A=\sum_{i=1}^N e_i$ - סכום סופי.

- J_i הם תת-מודולים אי-פריקים של A (כמודול שמאלי מעל A). במקרה זה ראינו כי יש תת הבוצה של האידאלים $\{J_i\}_{i=1}^n$ כך ש-A היא הסכום הישר שלהם.

נכתוב שוב $1=\sum_{i=1}^n e_i$ $\quad(\{J_i\}_{i=1}^n\subseteq\{J_i\}_{i=1}^N)$

$0\neq Ae_i\subseteq J_i$ אידאל שמאלי. J_i

ממינימליות J_i, $J_i=Ae_i$. אז:

$$\underbrace{e_j}_{\in J_j}=e_j\cdot 1=\sum_{i=1}^n \underbrace{e_je_i}_{\in J_i}$$

כיוון ש- $A=\bigoplus J_i$, נסיק כי: $e_je_i=\delta_{i,j}e_j$.

- כל אידאל שמאלי מינימלי של A איזומורפי כמודול מעל A לאחד מ- $J_1,\dots,J_n$. אכן, כי נרשום:

$$A=J\oplus(J_{i_1}\oplus\dots\oplus J_{i_r})=\Big(\bigoplus_{i\notin\{i_j\}} J_i\Big)\oplus(J_{i_1}\oplus\dots\oplus J_{i_r})$$

$$J\cong\bigoplus_{i\notin\{i_j\}} J_i$$

מאי-פריקות J, $J\cong J_i$ עבור i כלשהו.

טענה: תהי A אלגברה פשוטה למחצה עם יחידה. תהי π הצגה של A ממימד סופי. אז π פריקה לחלוטין.

הערה: המעבר החופשי בין מודולים להצגות בניסוחי הטענות נעשה כדי להבהיר כי מדובר באותם אובייקטים.

הוכחה: נכתוב כמו קודם $A=\bigoplus_{i=1}^n J_i$. אז:

$$V_\pi=A\cdot V_\pi=\sum_{i=1}^n J_iV_\pi$$

נשים לב כי $J_i\cdot V_\pi\subseteq V_\pi$ תת-מודול ($J_i\cdot V_\pi=Ae_iV_\pi$)

נבחר בסיס $\{v_1,\dots,v_k\}$ ל-V_π (מעל F). $V_\pi=Fv_1\oplus\dots\oplus Fv_k$

$$J_iV_\pi=J_iv_1+\dots+J_iv_k$$

$$V_\pi=\sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^k J_iv_l$$

כולם $J_iv_l\subseteq V_\pi$ תת-מודולים מעל A.

נניח כי l,i הם כאלה ש-$J_iv_l\neq 0$. נראה כי $J_iv_l\cong J_i$ כמודולים מעל A.

נגדיר ע"י $\varphi:J_i\to J_iv_l$, $\varphi(x)=x\cdot v_l=\pi(x)(v_l)$. ברור כי φ הומומורפיזם.

הגרעין של φ סגור לכפל משמאל ב-A. לכן $\ker\varphi\subseteq J_i$ אידאל שמאלי $\neq J_i$

ולכן ממינימליות J_i, $\ker\varphi=0$, φ איזו' ו- J_iv_l אי-פריק.

Scanned by CamScanner

אז V הוא סכום של מודולים אי-פריקים, אז הוא סכום ישר של חלק מהם. נשים לב כי המרכיבים האי-פריקים של π איזומורפיים לאידאלים שמאליים מינימליים.

<u>משפט</u>: תהי A אלגברה פשוטה למחצה עם יחידה, ויהי V מודול אי-פריק מעל A. אז V איזומורפי לאידאל שמאלי מינימלי של A (כמודולים מעל A).

<u>הוכחה</u>: כמו קודם, $V=\sum J_i V$. יהי i_0 כך ש- $J_{i_0}V\neq 0$.
$J_{i_0}V\subseteq V$ תת-מודול. V אי-פריק, ולכן $J_{i_0}V=V$.
יהי $v_0\in V$ כך ש- $J_{i_0}v_0\neq 0$ ונקבל $J_{i_0}\cong J_{i_0}\cdot v_0=V$.

<u>מסקנה</u>: לאלגברה A פשוטה למחצה עם יחידה, יש, עד כדי איזו' מעל A, מספר סופי של מודולים אי-פריקים מעל A, וכל אחד כזה איזומורפי לאידאל שמאלי מינימלי של A.

בלשון הצגות: כל הצגה אי-פריקה של A מופיעה בפירוק של ההצגה הרגולרית של A. בפרט זה נכון לחבורות סופיות G מעל שדה F עם $char(F)\nmid|G|$, כי אז: $A=F[G]$ פשוטה למחצה.

<u>הצגות אוניטריות של חבורות (ℂ, ℝ)</u>

<u>הגדרה</u>: הצגה של חבורה G במרחב V תקרא אוניטרית אם יש על V מכפלה פנימית שביחס אליה $\pi(g)$ אופרטור אוניטרי (איזומטריה) לכל $g\in G$. כלומר:

$$(u,v)=(\pi(g)u,\pi(g)v)$$

<u>טענה</u>: תהי π הצגה אוניטרית ממימד סופי, אז π פריקה לחלוטין.

<u>הוכחה</u>: נראה כי לכל תת-מרחב אינווריאנטי $W\subseteq V$, גם $W^\perp\subseteq V$ אינווריאנטי. יהי $u\in W^\perp$. לכל $g\in G$ יש להראות כי $\pi(g)u\in W^\perp$. לכל $w\in W$,

$$(\pi(g)u,w)=(u,\underbrace{\pi(g^{-1})w}_{\in W})=0$$

לכן $\pi(g)W^\perp\subseteq W^\perp$ (ובהכרח שיש שוויון).
כיוון ש- V ממימד סופי, $V=W\oplus W^\perp$. נמשיך באינדוקציה על המימד, עד שנקבל פירוק לאי-פריקים.

<u>טענה</u>: תהי G חבורה סופית ו- π הצגה של G במרחב V. אז יש על V מכפלה פנימית שביחס אליה π אוניטרית.

הוכחה: נבחר מכפלה פנימית $(,)$ כלשהי על V. נגדיר לכל $u,v\in V$:

$$\langle u,v\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi(g)u, \pi(g)v)$$

גם זו מכפלה פנימית, קו-לינאריות ברורה (ומזה x עם צמוד) וכן סימטריה (הרמיטיות) וחיוביות ברורים.
כעת:

$$\langle \pi(h)u, \pi(h)v\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi(gh)u, \pi(gh)v) = \langle u,v\rangle$$

הגדרה: נאמר כי הן שקולות אוניטרית אם יש שקילות: σ, π נאמר כי שתי הצגות אוניטריות של G
$$T: V_\pi \to V_\sigma$$
של הצגות שהיא גם איזומטריה.

משפט: תהיינה π ו- σ הצגות אוניטריות ממימד סופי של G. נניח כי $\sigma\cong\pi$, אז הן שקולות אוניטרית.

הוכחה: תהי $T: V_\pi\to V_\sigma$ שקילות.
נתבונן ב: $T^*\circ T: V_\pi\to V_\pi$, זה אופרטור חיובי, ולכן יש לו שורש חיובי יחיד: $T^*T = P^2$, כאשר $P: V_\pi\to V_\pi$ אופרטור חיובי.
נגדיר $TP^{-1} =: U$, ונראה כי זו איזומטריה - $U^* = U^{-1}$. אכן:
$$U^*U = (P^{-1})^*T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = id$$
נראה כי U שקילות של σ, π, כלומר:
לכל $g\in G$ $U\pi(g) = \pi(\sigma)U$.
לכל $g\in G$:
$$T\pi(g) = \sigma(g) \Rightarrow UP\pi(g) = \sigma(g)UP$$
נציב g^{-1} במקום g, ואז:
$$\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$$
$$\sigma(g)^* = \sigma(g^{-1})$$
נצמיד:
$$UP\pi(g)^* = \sigma(g)^*UP$$
$$\pi(g)PU^{-1} = PU^{-1}\sigma(g)$$
מכאן, $\pi(g)$ מתחלף עם P^2:
$$\pi(g)P^2 = \pi(g)PU^{-1}UP = PU^{-1}\sigma(g)\underbrace{UP}_{T} = PU^{-1}\underbrace{UP}_{T}\pi(g) = P^2\pi(g)$$
נכתוב: $P = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i E_i$
כאשר $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0$ הערכים העצמיים של P ו- $E_1,\dots,E_k$ מערכת ההטלות האורתוגונליות על המרחבים העצמיים של P. כעת $P^2 = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 E_i$
ניתן לכתוב את E_i כפולינומים ב- P^2, ולכן $\pi(g)$ מתחלף עם E_i, ו- $\pi(g)$ מתחלף עם P אז:
$$\sigma(g)UP = UP\pi(g) = U\pi(g)P \Rightarrow \sigma(g)U = U\pi(g)$$

Scanned by CamScanner

מכפלה טנזורית

נתונים מרחבים וקטוריים V,W מעל שדה F.
נבחר בסיסים $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{w_\beta\}_{\beta\in J}$ ל- V,W בהתאמה.

$$\{v_\alpha\otimes w_\beta\}_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}$$

$V\otimes W$ הוא המרחב שבסיסו הוא ואיבריו הם סכומים סופיים פורמליים של איברים אלה (עם מקדמים ב- F).

נגדיר ל- $v\in V, w\in W$ כפל בילינארי באופן הבא:

$$v=\sum_{\alpha\in I} x_\alpha v_\alpha\in V,\quad w=\sum_{\beta\in J} y_\beta w_\beta\in W$$

$$v\otimes w=\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} x_\alpha y_\beta\, v_\alpha\otimes w_\beta$$

ברור כי:

$$(av+bv')\otimes(cw+dw')=ac(v\otimes w)+ad(v\otimes w')+bc(v'\otimes w)+bd(v'\otimes w')$$

ניקח זוג בסיסים נוסף $\{v'_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{w'_\beta\}_{\beta\in J}$, ונראה כי $\left\{v'_\alpha\otimes w'_\beta \,\middle|\, \substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}\right\}$ בסיס ל- $V\otimes W$. נכתוב את מטריצות המעבר:

$$v'_\alpha=\sum_{\gamma\in I} x_{\gamma,\alpha} v_\gamma,\quad v_\alpha=\sum_{\gamma\in I} x'_{\gamma,\alpha} v'_\gamma$$

$$w'_\beta=\sum_{\eta\in J} y_{\eta,\beta} w_\eta,\quad w_\beta=\sum_{\eta\in J} y'_{\eta,\beta} w'_\eta$$

ברור כי ההכפלה פורשת. נראה אי-תלות. נניח כי:

$$\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} z_{\alpha,\beta} v'_\alpha\otimes w'_\beta=0$$

$$\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}\sum_{\substack{\gamma\in I\\ \eta\in J}} z_{\alpha,\beta} x_{\gamma,\alpha} y_{\eta,\beta}(v_\gamma\otimes w_\eta)=0$$

לכן, לכל γ,η: $\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} z_{\alpha,\beta} x_{\gamma,\alpha} y_{\eta,\beta}=0$

נכפיל ב- $x'_{\alpha',\gamma} y'_{\beta',\eta}$ ונסכום על כל ה- $\gamma\in I$, $\eta\in J$.

$$0=\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}} z_{\alpha,\beta}\underbrace{\Big(\sum_{\gamma\in I} x'_{\alpha',\gamma} x_{\gamma,\alpha}\Big)}_{\delta_{\alpha',\alpha}}\underbrace{\Big(\sum_{\eta\in J} y'_{\beta',\eta} y_{\eta,\beta}\Big)}_{\delta_{\beta',\beta}}=z_{\alpha,\beta}$$

Scanned by CamScanner

טענה: העתקה בילינארית $t: V\times W\to X$ של מרחבים וקטורים.
אפשר להרחיב את t להעתקה לינארית

$$T: V\otimes W\to X$$

כך ש:

$$T(v\otimes w)=t(v,w)$$

נגדיר:

$$T\left(\sum x_{\alpha,\beta} v_\alpha\otimes w_\beta\right)=\sum x_{\alpha,\beta}\, t(v_\alpha, w_\beta)$$

זו העתקה לינארית

$$T: V\otimes W\to X$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\sum x_\alpha v_\alpha \\ w=\sum y_\beta w_\beta \end{array}\right\} \begin{aligned} T(v\otimes w)&=T\left(\sum x_\alpha y_\beta\, v_\alpha\otimes w_\beta\right)= \\ &=\sum x_\alpha y_\beta\, t(v_\alpha, w_\beta)= \\ &=t\left(\sum x_\alpha v_\alpha, \sum y_\beta w_\beta\right)=t(v,w)\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "i"'] & X \\ & V\otimes W \arrow[u, dashed, "T"'] \end{tikzcd}$$

טענה: ההתאמה $T\mapsto t$ היא איזומורפיזם:

$$B: \ell_F(V\times W, X)\cong Hom_F(V\otimes W, X)$$

טענה:
1) $V\otimes F\cong V$ ע"י T כך ש: $T(v\otimes\lambda)=\lambda v$
2) $(V\otimes U)\otimes W\cong V\otimes(U\otimes W)$ ע"י T כך ש: $T((v\otimes u)\otimes w)=v\otimes(u\otimes w)$
3) $V\otimes(U\oplus W)\cong(V\otimes U)\oplus(V\otimes W)$
4) $V\otimes U\cong U\otimes V$

טענה: נניח כי $\dim_F W<\infty$, אז: $V\otimes_F W\cong Hom_F(W^*, V)$

הוכחה: בשימוש בבסיסים כמו קודם, נגדיר:

$$T\left(\sum x_{\alpha,\beta}\, v_\alpha\otimes w_\beta\right)(\varphi)=\sum x_{\alpha,\beta}\,\varphi(w_\beta)v_\alpha\in V$$

ברור ש T מוגדר היטב ולינארי.

T חח"ע: נניח כי $\sum x_{\alpha,\beta} v_\alpha\otimes w_\beta\in\ker T$. אז לכל $\varphi\in W^*$,

$$\sum_{\alpha\in I}\left(\sum_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta}\,\varphi(w_\beta)\right)v_\alpha=0$$

מכאן, לכל $\alpha\in I$,

$$\sum_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta}\,\varphi(w_\beta)=0 \Rightarrow \varphi\left(\sum_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta} w_\beta\right)=0$$

לכל $\varphi\in W^*$.
לכן, $\sum_{\beta\in J} x_{\alpha,\beta} w_\beta=0$ ולכן $x_{\alpha,\beta}=0$ לכל $\alpha\in I$, $\beta\in J$.

Scanned by CamScanner

__T על__: תהי $R: W^* \to V$ העתקה לינארית.
יהי $\{\varphi_\beta\}_{\beta \in J}$ הבסיס הדואלי של $\{w_\beta\}_{\beta \in J}$

נכתוב:

$$R(\varphi_\beta) = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha,\beta} v_\alpha$$

נחשב:

$$T\left(\sum x_{\alpha,\beta} v_\alpha \otimes w_\beta\right)(\varphi_{\beta'}) = \sum x_{\alpha,\beta} \varphi_{\beta'}(w_\beta) v_\alpha =$$
$$= \sum x_{\alpha,\beta'} v_\alpha = R(\varphi_{\beta'})$$

כלומר $R = T\left(\sum x_{\alpha,\beta} v_\alpha \otimes w_\beta\right)$, ו-$T$ על.

נתונות העתקות לינאריות $T: V_1 \to W_1$, $S: V_2 \to W_2$.
נגדיר $l: V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes W_2$ באופן הבא:

$$l(v_1, v_2) = T(v_1) \otimes S(v_2)$$

זו העתקה בילינארית.
לכן יש העתקה לינארית יחידה, $L: V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$
כך ש: $L(v_1 \otimes v_2) = l(v_1, v_2) = T(v_1) \otimes S(v_2)$.
מסמנים $L = T \otimes S$,

$$Hom_F(V_1, W_1) \otimes Hom_F(V_2, W_2) \longrightarrow Hom_F(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

Scanned by CamScanner