$$T : V_1 \to V_2$$

$$S : W_1 \to W_2$$

$$T \otimes S : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$$

$$(T \otimes S)(v_1 \otimes w_1) = T(v_1) \otimes S(w_1)$$

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2 \xrightarrow{R} V_3$$

$$W_1 \xrightarrow{S} W_2 \xrightarrow{L} W_3$$

$$V_1 \otimes W_1 \xrightarrow{T \otimes S} V_2 \otimes W_2 \xrightarrow{R \otimes L} V_3 \otimes W_3$$

$$(R \otimes L) \circ (T \otimes S) = (R \circ T) \otimes (L \circ S)$$

טענה: יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F.

אז:

$$\mathrm{End}_F V \otimes \mathrm{End}_F W \xrightarrow[\sim]{\ell} \mathrm{End}_F (V \otimes W)$$

מוגדר ע"י:

$$(\ell(T \otimes S))(v \otimes w) = T(v) \otimes S(w)$$

וכן

$$\ell((T_1 \otimes S_1) \circ (T_2 \otimes S_2)) = \ell((T_1 T_2) \otimes (S_1 S_2))$$

מכפלה טנזורית של אלגבראות (מעל F)

נתונות שתי אלגבראות A, B מעל F. מוגדר המרחב הוקטורי $A\otimes B$ מעל F (כמרחבים וקטוריים).

נזכור, ל- $a\in A$:

$$\lambda(a): A \to A$$

$$\lambda(a)(x) = ax$$

$$\lambda(a) \in End_F A \;,\; \lambda(b) \in End_F B \quad (b\in B)$$

אז ניתן להגדיר:

$$l(a,b): A\times B \longrightarrow End_F(A\otimes B)$$

העתקה בילינארית (l) - $l(a,b) = \lambda(a)\otimes\lambda(b)$

תהי: ההעתקה הלינארית $L: A\otimes B \longrightarrow End_F(A\otimes B)$

כך ש: $L(a\otimes b) = \lambda(a)\otimes\lambda(b)$

נגדיר כפל ב- $A\otimes B$:

יהיו $\eta, \zeta \in A\otimes B$. נגדיר: $\zeta\eta = L(\zeta)\eta$

נכתוב $\zeta = \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$ באיזשהו אופן.

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\otimes\beta_j$$

$$\zeta\eta = L(\zeta)(\eta) = \sum_{i=1}^{n} L(a_i\otimes b_i)(\eta) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda(a_i)\otimes\lambda(b_i))(\eta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\lambda(a_i)\otimes\lambda(b_i))(\alpha_j\otimes\beta_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i\alpha_j\otimes b_i\beta_j$$

קל לבדוק שעם הכפל הזה $A\otimes B$ אלגברה מעל F.

באופן דומה, יהי V מודול מעל A, ו- W מודול מעל B, אז יש לנו מבנה של מודול $V\otimes W$ מעל $A\otimes B$ כך ש:

$$(a\otimes b)(v\otimes w) = av\otimes bw$$

בלשון הצגות, תהי π הצגה של A במרחב V ותהי σ הצגה של B במרחב W אז יש לנו הצגה $\pi\otimes\sigma$ של $A\otimes B$ ב- $V\otimes W$:

$$(\pi\otimes\sigma)(a\otimes b)(v\otimes w) = \pi(a)(v)\otimes\sigma(b)(w)$$

למה: תהיינה G, H חבורות. אז

$$F[G]\otimes F[H] \cong F[G\times H]$$

הוכחה: איברי $F[G]\otimes F[H]$ נראים כך:

סכומים סופיים $\sum_{\substack{g\in G\\ h\in H}} a_{g,h}\, g\otimes h$

(איברי G ואיברי H בסיסים ל- $F[G]$ ו- $F[H]$)

נגדיר T ששולחת את איבר זה ל-

$$\sum_{\substack{g\in G\\ h\in H}} a_{g,h}(g,h)$$

T איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

כיוון ש:

$$T((g_1\otimes h_1)(g_2\otimes h_2)) = T(g_1g_2\otimes h_1h_2) = (g_1g_2, h_1h_2) =$$

$$= (g_1,h_1)(g_2,h_2) = T(g_1\otimes h_1)T(g_2\otimes h_2)$$

ברור כי T אף הומומורפיזם אלגבראות.

נניח כי π הצגה של G ב- V ו- σ הצגה של H ב- W.

π מגדירה הצגה (נסמנה ב- π) של $F[G]$, וכנ"ל עבור σ.

$$\pi\left(\sum a_g g\right) = \sum a_g \pi(g)$$

תהי $\sigma\otimes\pi$ ההצגה של $F[G]\otimes F[H]$ ב- $W\otimes V$. $V\otimes W$

באמצעות הלמה מתקבלת הצגה של $G\times H$ ב- $W\otimes V$ $V\otimes W$

(נסמנה עד"ן ב- $\sigma\otimes\pi$):

$$(\pi\otimes\sigma)\left(\sum_{g,h} a_{g,h}(g,h)\right) = \sum_{g,h} a_{g,h}\,\pi(g)\otimes\sigma(h)$$

נצמצם ל- $G\times H$ ונקבל הצגה של $G\times H$ ב- $W\otimes V$ $V\otimes W$

$$(\pi\otimes\sigma)(g,h) = \pi(g)\otimes\sigma(h)\in GL(V\otimes W)$$

כאשר $G=H$ מסתכלים על ההצגה

$$G\to GL(V\otimes W)$$
$$g\mapsto \pi(g)\otimes\sigma(g)$$

(מכפלה טנזורית פנימית).

טענה: תהיינה σ,π הצגות ממימד סופי של חבורות G,H.

אז

$$\widehat{\pi\otimes\sigma}\cong\hat{\pi}\otimes\hat{\sigma}$$

הוכחה:

$$V_\pi^*\otimes V_\sigma^* = Hom_F(V_\pi,F)\otimes Hom_F(V_\sigma,F)\xrightarrow{\sim} Hom_F(V_\pi\otimes V_\sigma, F\otimes_F F)\xrightarrow{\sim} Hom_F(V_\pi\otimes V_\sigma, F)$$

נבנה

$$T: V_\pi^*\otimes V_\sigma^*\xrightarrow{\sim}(V_\pi\otimes V_\sigma)^*$$

$$T(\varphi\otimes\xi)(v\otimes w) = \varphi(v)\xi(w)$$

נראה כי T שקילות של $\widehat{\pi\otimes\sigma}$ ו- $\hat{\pi}\otimes\hat{\sigma}$.

$$T\left((\hat{\pi}\otimes\hat{\sigma})(g,h)(\varphi\otimes\xi)\right)(v\otimes w)=$$
$$=T\left((\hat{\pi}(g)\otimes\hat{\sigma}(h))(\varphi\otimes\xi)\right)(v\otimes w)=$$
$$=T\left(\hat{\pi}(g)(\varphi)\otimes\hat{\sigma}(h)(\xi)\right)(v\otimes w)=$$
$$=\hat{\pi}(g)(\varphi)(v)\cdot\hat{\sigma}(h)(\xi)(w)=$$
$$=\varphi(\pi(g^{-1})(v))\,\xi(\sigma(h^{-1})(w))=T(\varphi\otimes\xi)\left(\pi(g^{-1})v\otimes\sigma(h^{-1})(w)\right)=$$
$$=T(\varphi\otimes\xi)\left((\pi\otimes\sigma(g^{-1},h^{-1}))(v\otimes w)\right)=$$
$$=\widehat{\pi\otimes\sigma}(g,h)\left(T(\varphi\otimes\xi)\right)(v\otimes w)$$

כיוון שזה נכון לכל $v\otimes w$,
$$T\left((\hat{\pi}\otimes\hat{\sigma})(g,h)(\varphi\otimes\xi)\right)=\widehat{\pi\otimes\sigma}(g,h)\left(T(\varphi\otimes\xi)\right)$$
וכיוון שזה נכון לכל $\varphi\otimes\xi$,
$$T\circ\left((\hat{\pi}\otimes\hat{\sigma})(g,h)\right)=\widehat{\pi\otimes\sigma}(g,h)\circ T$$
לכל $(g,h)\in G\times H$.

כרקטרים

תהי π הצגה ממימד סופי של אלגברה A במרחב V. נגדיר
$$\chi_\pi : A\to F$$
$$\chi_\pi(a)=tr(\pi(a))$$
χ_π נקראת הכרקטר של π.

גם הצגות π ממימד 1 נקראות כרקטרים של A. כאן, $\chi_\pi=\pi$ הומומורפיזם של אלגבראות $\pi:A\to F$.

במקרה ש-π הצגה ממימד 1 של הצגה G, π היא הומומורפיזם $G\to F^*$ של חבורות.

תכונות:

תהי π הצגה ממימד סופי של A.

1) $\chi_\pi(ab)=\chi_\pi(ba)$ לכל $a,b\in A$.
אם π הצגה של חבורה G, נכון גם: $\chi_\pi(x)=\chi_\pi(gxg^{-1})$ ל-$g,x\in G$.

2) $U\subseteq V_\pi$ תת-מרחב אינווריאנטי ונסמן $\sigma=\pi^U$ ואת ההצגה המושרה ב-V_π/U נסמן ב-τ אז:
$$\chi_\pi=\chi_\sigma+\chi_\tau$$
ובפרט כאשר $\pi\cong\sigma\oplus\tau$ אז $\chi_\pi=\chi_\sigma+\chi_\tau$.

3) נניח כי A אלגברה עם 1 אז $\chi_\pi(1)=\dim\pi$.

4) $\chi_{\hat{\pi}}(g)=\chi_\pi(g^{-1})$ (π הצגה של חבורה G, $g\in G$).

5) תהי π הצגה אוניטרית של חבורה G, אז:
$$\chi_\pi(g^{-1})=\overline{\chi_\pi(g)}$$

6) תהיינה π,σ הצגות ממימד סופי של אלגבראות A,B, אז:
$$\chi_{\pi\otimes\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\chi_\pi(a_i)\chi_\sigma(b_i)$$
בחבורות:
$$\chi_{\pi\otimes\sigma}(g,h)=\chi_\pi(g)\chi_\sigma(h)$$

הוכחה:
תחילה נבחין כי לרפרזנטציות שקולות יש אותו כרקטר:

$$T: V_\pi \xrightarrow{\sim} V_\sigma$$

$$T\pi(a) = \sigma(a)T$$

$$\Downarrow$$

$$\pi(a) = T^{-1}\sigma(a)T$$

$$\Downarrow$$

$$tr(\pi(a)) = tr(\sigma(a))$$

1) $\chi_\pi(ab) = tr(\pi(ab)) = tr(\pi(a)\pi(b)) = tr(\pi(b)\pi(a)) = tr(\pi(ba)) = \chi_\pi(ba)$

2) ראינו כי יש ל- V_π בסיס B כך שבסיס זה

$$[\pi(a)]_B = \begin{array}{c} \\ \dim U \end{array}\left(\begin{array}{c|c} X(a) & * \\ \hline 0 & Y(a) \end{array}\right)$$

כאשר $a \to X(a)$, $a \to Y(a)$ מימוש מטריציוני של σ; ″ ″ ″ τ. אכן:

$$\chi_\pi(a) = tr(\pi(a)) = tr(X(a)) + tr(Y(a)) = \chi_\sigma(a) + \chi_\tau(a)$$

3) $\chi_\pi(1) = tr(id_{V_\pi}) = \dim V_\pi = \dim \pi$

4) ראינו שיש מימושים מטריציוניים ל- π ול- $\hat{\pi}$ כך ש:

$$[\hat{\pi}(g)]_{\hat{B}} = [\pi(g^{-1})]_B^t$$

ואז ברור כי:

$$\chi_{\hat{\pi}}(g) = tr[\hat{\pi}(g)]_B = tr[\pi(g^{-1})]_B^t = tr[\pi(g^{-1})]_B = \chi_\pi(g^{-1})$$

5) $\chi_\pi(g^{-1}) = tr\,\pi(g^{-1}) = tr\,\pi(g)^{-1} = tr\,\pi(g)^* = \overline{tr\,\pi(g)} = \overline{\chi_\pi(g)}$

6) נבחר בסיסים ל- V_π ול- V_σ, ונייצג במטריצות את $\pi(a)$ ו- $\sigma(b)$:

$$B_{V_\pi} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B_{V_\sigma} = \{w_1, \dots, w_m\}$$

נבחר

$$B_{V_\pi \otimes V_\sigma} = \{v_1\otimes w_1, v_1\otimes w_2, \dots, v_1\otimes w_m, v_2\otimes w_1, \dots, v_2\otimes w_m, \dots, v_n\otimes w_m\}$$

נניח כי

$$[\pi(a)]_{B_{V_\pi}} = (X_{ij}(a))_{1\le i,j\le n}$$

$$[\sigma(b)]_{B_{V_\sigma}} = (Y_{rs}(b))_{1\le r,s\le m}$$

$$[\pi(a)\otimes\sigma(b)]_{B_{V_\pi\otimes V_\sigma}} = \left(\text{תרגיל 5}\right)$$

בית פירוק התרגיל 5 הוא:
כאשר בוחרים בסיסים טוב

$$X_{n\times n} \overset{\text{מכפלת קרונקר}}{\otimes} Y_{m\times m} = \begin{pmatrix} X_{11}Y & X_{12}Y & \cdots & X_{1n}Y \\ X_{21}Y & X_{22}Y & \cdots & X_{2n}Y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}Y & X_{n2}Y & \cdots & X_{nn}Y \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$tr(X\otimes Y) = \sum_{1\le i\le n} tr(Y)X_{ii} = tr(X)\,tr(Y)$$

פרק ב' - הלמה של שור ומסקנות
(Schor)

הלמה של שור (מאוד חשובה!):

יהי V מודול אי-פריק מעל אלגברה A, ויהי W מודול מעל A.

א) נניח כי יש לנו איבר $0\neq T\in Hom_A(V,W)$, אז T חח"ע.
ב) נניח כי $0\neq T\in Hom_A(W,V)$, אז T על.
ג) האלגברה $End_A(V)$ היא אלגברה עם חילוק, מעל F.
ד) נניח כי גם W אי-פריק, אז $W\cong V$ כמודולים מעל A אמ"מ $Hom_A(V,W)\neq 0$.
ה) נניח כי F סגור אלגברית, ו- V ממימד סופי מעל F. נניח כי $V\cong W$, אז $Hom_A(V,W)$ ממימד 1 מעל F. ונוצר ע"י כל איבר שונה מ-0 ב- $Hom_A(V,W)$.

הוכחה:

א) $Ker\,T$ תת-מודול של V. $T\neq 0$, ולכן $Ker\,T\subsetneq V$ $\overset{\text{אי-פריקות}}{\Longrightarrow}$ $Ker\,T=0$.
ב) $Im\,T$ תת-מודול של V. $T\neq 0$, ולכן $Im\,T\neq 0$ $\Longrightarrow$ $Im\,T=V$.
ג) ברור מ- א' ו-ב'.
ד) אם $W\cong V$ נקח איזו' של מודולים מעל A, $T:V\to W$. ואז: $0\neq T\in Hom_A(V,W)$.
מצד שני אם יש $0\neq T\in Hom_A(V,W)$, מ- א' ו-ב' T חח"ע ועל. ואז $W\cong V$.
ה) יהיו $0\neq T,S\in Hom_A(V,W)$. אז T איזומורפיזם. נתבונן ב-

$$ST^{-1}\in End_A(W).$$

כיוון ש- $\dim_F V$ סופי ו- F סגור אלגברית, יש ל- ST^{-1} ע"ע λ ב- F.

$$ST^{-1}-\lambda I_W\in End_A(W)$$

לא חח"ע כי λ ע"ע.

אז מ- א', $ST^{-1}=\lambda I_W$, ואז $\lambda T=S$.

מסקנה: בתנאים של ה' נתבונן ב- $Z(A)$ המרכז של A.
תהי π הצגה אי-פריקה של A ממימד סופי, אז לכל $z\in Z(A)$,

$$\pi(z)=\omega_\pi(z)I_{V_\pi}$$

זאת כי אם $z\in Z(A)$, $\pi(z)\pi(a)=\pi(a)\pi(z)$ לכל $a\in A$.
אז $\pi(z)\in End_A(V_\pi)$, מתחלף עם כל $End_A(V_\pi)$.

תיאור $Hom_A(V,W)$ כאשר V,W פריקים לחלוטין.

תהי π הצגה של A במרחב V פריקה לחלוטין כך ש:

$$\pi \cong n_1\pi_1 \oplus \dots \oplus n_k\pi_k$$

כאשר $\pi_1,\dots,\pi_k$ הצגות אי-פריקות שאין ביניהן שתיים שקולות! $n_1,\dots,n_k$ טבעיים, והסימון הוא:

$$n_1\pi_1 \cong \underbrace{\pi_1\oplus\dots\oplus\pi_1}_{n_1}$$

תהי σ הצגה של A במרחב W פריקה לחלוטין:

$$\sigma \cong m_1\pi_1\oplus\dots\oplus m_r\pi_r \oplus m_{r+1}\tau_{r+1}\oplus\dots\oplus m_l\tau_l$$

כאשר $r\le l,k$ והצגות $\tau_{r+1},\dots,\tau_l$ - אי-פריקות.
ואין שתיים שקולות מבין $\pi_1,\dots,\pi_k,\tau_{r+1},\dots,\tau_l$ ו- $m_1,\dots,m_l$ טבעיים.

יש פירוקים $V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$

ולכל $1\le i\le k$: $V_i = V_{i,1}\oplus\dots\oplus V_{i,n_i}$

כאשר $V_i, V_{i,j}$ מרחבים אינווריאנטיים, כך ש:

$$\pi^{V_{ij}}\cong\pi_i \quad , \quad 1\le i\le k,\ 1\le j\le n_i$$

באופן דומה,

$$W=W_1\oplus\dots\oplus W_l$$
$$W_i = W_{i,1}\oplus\dots\oplus W_{i,m_i}$$

כאשר $1\le i\le r$, $\sigma^{W_{i,j}}\cong\pi_i$, לכל $1\le j\le m_i$.

כאשר $r+1\le i\le l$, $\sigma^{W_{i,j}}\cong\tau_i$, לכל $1\le j\le m_i$.

טענה: יהי $T\in Hom_A(V,W)$, אז:

א) $T(V_{r+1}\oplus\dots\oplus V_k)=0$

ב) לכל $1\le i\le r$, $T(V_i)\subseteq W_i$.

הוכחה:

א. יהי $r+1\le i\le k$, ונראה כי $T(V_i)=0$. נסמן $T_{i,j}=T|_{V_{i,j}}$, כאשר $1\le j\le n_i$.
יהי $1\le s\le l$, נסמן ב- R_s את ההטלה של W על W_s שמתאפסת על $\oplus_{p\ne s} W_p$. נסתכל על $R_s\circ T_{ij}$. זו העתקה לינארית $V_{ij}\to W_s$ שהיא הומומורפיזם של A.
כיוון ש- V_{ij} אי-פריק, אז אם $R_s\circ T_{ij}\ne 0$, $R_s\circ T_{ij}$ חח"ע ואז $R_s(T_{ij}(V_{ij}))\subseteq W_s$ תת-מודול אי-פריק. ונסיק כי זה איזומורפי (כהצגה) ל- π_s או ל- τ_s (כתלות בהאם $s\le r$). אבל π_i לא שקולה לאף הצגה כזו, כי $i\ge r+1$. לכן $R_s\circ T_{ij}=0$.
לכל $v\in V_{ij}$ מתקיים:

$$T_{ij}(v)=\sum_{s=1}^{l} R_s(T_{ij}(v))=0$$

ומכאן $T_{ij}(v)=0$ לכל $v\in V_{ij}$, כלומר $T_{ij}=0$ לכל $1\le j\le n_i$.
נסיק כי $T(V_i)=0$ לכל $r+1\le i\le k$.

ב. באופן דומה, ל- $1\le i\le r$, נניח כי לכל $s\neq i$, $R_s\circ T_{ij}=0$.
לכן, אם $R_s\circ T_{ij}\neq 0$, $i=s$, ולכל s, $v\in V_j$,

$$T_{ij}(v)=\sum_{s=1}^{k} R_s(T_{ij}(v))=R_i(T_{ij}(v))\in W_i$$

מכאן $T(V_j)\le W_i$.

<u>מסקנה:</u>
הפירוק $V=V_1\oplus\dots\oplus V_k$ יחיד. כלומר אם יש פירוק $V=V'_1\oplus\dots\oplus V'_k$ כאשר לכל $1\le i\le k$, $V'_i=V'_{i_1}\oplus\dots\oplus V'_{i_{m_i}}$ פירוק לסכום מודולים אי-פריקים כך ש- $\pi^{V'_{i_j}}\cong\pi_i$ אז $V_i=V'_i$ לכל $i\le k$.

<u>הוכחה:</u> נקח $T=I_V\in Hom_A(V,V)$. מהטענה הקודמת, לכל $i\le k$, $T(V_i)\le V'_i$, כלומר $V_i\le V'_i$ לכל i, ובאופן סימטרי $V'_i\le V_i$, ולכן $V'_i=V_i$.

<u>הערה:</u> את המודולים $V_1,\dots,V_r$ נקראים המרכיבים האיזוטיפיים (ההומוגניים) של המודול V.

$$Hom_A(V,W)\cong Hom_A(V_1\oplus\dots\oplus V_r,W_1\oplus\dots\oplus W_r)\cong$$
$$(T\longrightarrow T|_{V_1\oplus\dots\oplus V_r})$$

$$\cong\bigoplus Hom_A(V_i,W_i)$$

$$(T|_{V_1\oplus\dots\oplus V_r}\longmapsto(T|_{V_1},\dots,T|_{V_r}))$$

כלומר, כדי להבין את $Hom_A(V,W)$ נרצה להבין את $Hom_A(V_i,W_i)$.

<u>משפט:</u> תהי π_0 הצגה אי-פריקה של A ב-V_{π_0}. נתונות שתי הצגות σ,π של A כך ש- $\sigma\cong m\pi_0$, $\pi\cong n\pi_0$. נסמן ב-Δ את אלגברת האנדומורפיזמים של V_{π_0} מעל A (אלגברה עם חילוק).
אז:
$$Hom_A(V_\pi,V_\sigma)\cong M_{m\times n}(\Delta)$$
איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

<u>הוכחה:</u> נכתוב $V_\pi=U_1\oplus\dots\oplus U_n$ כך ש- $\pi^{U_i}\cong\pi_0$.
$V_\sigma=Y_1\oplus\dots\oplus Y_m$ כך ש- $\sigma^{Y_i}\cong\pi_0$,
נקבע איזומורפיזמים $A_i:V_{\pi_0}\xrightarrow{\sim}U_i$, $i\le n$,
$B_j:V_{\pi_0}\xrightarrow{\sim}Y_j$, $j\le m$,
יהי $T\in Hom_A(V_\pi,V_\sigma)$. נסמן $P_i:V_\pi\to U_i$ ההטלה שמתאפסת על כל $\bigoplus_{l\neq i}V'_l$, וכנ"ל $Q_j:V_\sigma\to Y_j$.

יהי $T \in Hom_A(V_2, V_1)$.

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} TP_j(v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Q_i \underbrace{TP_j(v)}_{T_j P_j(v)}$$

נסמן $T_j = T|_{U_j}$.

$$Q_i T_j \in Hom_A(U_j, Y_i)$$

כעת $B_i^{-1} Q_i T_j A_j \in End_A(V_\pi) = \Delta$.

$$=: X_{ij}(T) \in \Delta$$

לכן,

$$Q_i T_j = B_i X_{ij}(T) A_j^{-1}$$

$$T(v) = \sum_{i,j} B_i X_{ij}(T) A_j^{-1}(P_j(v))$$

נגדיר $\varphi(T) = \left(X_{ij}(T)\right)_{\substack{i \le m \\ j \le n}}$

φ העתקה לינארית וחח"ע בבירור. היא על כי ניתן לחזור אחורה מכל מטריצה.