אלגברה ב2

© ארזים

23 במאי 2017

1 משפט גלואה

תזכורות

1. אנחנו אומרים כי לפולינום f יש נוסחת שורשים מעל K אם יש מגדל של שדות $K=K_0\subseteq K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots\subseteq K_n$ כך שמעל K_n, f מתפצל, וכן $K_{i+1}=K_i\left[\alpha_i\right]$ עבור α_i שמקיים $\alpha_i^{n_i}\in K_i$ עבור n_i כלשהו.
2. $\mathrm{Gal}\left(f/K\right)=\mathrm{Gal}\left(N/K\right)$, באשר N שדה הפיצול של f.
3. G פתירה אם קיימת סדרה

$$1=G_n\triangleleft G_{n-1}\triangleleft\cdots\triangleleft G_0=G$$

כאשר G_{i+1}/G_i מעגלית. לחילופין, אפשר לדרוש $G_i\triangleleft G$, אבל אז המנות צריכות להיות רק אבליות.

משפט 1.1 (משפט גלואה) יהי $f\in K\left[x\right]$ פולינום ממעלה חיובית מעל שדה K מאפיון 0. אזי יש לו נוסחת שורשים אם ורק אם $\mathrm{Gal}\left(f/K\right)$ פתירה.

הוכחה: נניח כי $G=\mathrm{Gal}\left(f/K\right)$ פתירה, ונסמן N את שדה הפיצול של f. נוסיף אל K את שורשי היחידה מסדר n (את החבורה שהם יוצרים סימנו μ_n). נסמן

$$K_0=K,K_1=K\left[\mu_n\right]$$

ואז ראינו כי

$$\mathrm{Gal}\left(N(\mu_n)/K(\mu_n)\right)\cong\underbrace{\mathrm{Gal}\left(N/K(\mu_n)\cap N\right)}_{H}\leq G$$

לכן גם H פתירה, כי תת חבורה של חבורה פתירה היא פתירה. לכן די למצוא מגדל מתאים בין K_1 אל $N\left(\mu_n\right)$, ולכן נוכל בלי הגבלת הכלליות להחליף את K המקורים עם K_1, ואת N עם $N\left(\mu_n\right)$, כלומר בלי הגבלת הכלליות, $\mu_n\subseteq K,N$.
נקח שדות שבת לסדרה

$$1\triangleleft G_n\triangleleft\cdots\triangleleft G_0=G$$

עם G_i/G_{i+1} מעגליות. נסמן $K_i = N^{G_i}$ ונקבל

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = N$$

אזי $K_i \subseteq K_{i+1}$ היא גלואה, כי $G_{i+1} \triangleleft G_i$, והיא מעגלית כי $G_i/G_{i+1} \cong \mathrm{Gal}\left(K_{i+1}/K_i\right)$, והסדר שלה, n_i, מחלק את $n = |G|$. כיוון שמתקיים $\mu_n \subseteq K_i$, ראינו שמתקיים $K_{i+1} = K_i\left[\alpha_i\right]$, כאשר $\alpha_i^{n_i} \in K_i$. לכן יש נוסחת שורשים עבור f.

בכיוון השני, נתון f ונתון מגדל

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

כך שמעל K_n f מתפצל, וכן $K_{i+1} = K_i\left[\alpha_i\right]$ כאשר $\alpha_i^{n_i} \in K_i$. נרצה להראות שהחבורה G פתירה. נשים לב שנובע ששדה הפיצול N של f מוכל בתוך K_n, וגם בתוך L_n, סגור גלואה של K_n/K. לכן

$$\mathrm{res} : \mathrm{Gal}\left(L_n/K\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}\left(N/K\right)$$

ואם נראה שהחבורה השמאלית פתירה, נקבל שהימנית גם, כי מנה של פתירה היא פתירה. לכן די להוכיח כי $\mathrm{Gal}\left(L_n/K\right)$ פתירה. ניתן הגדרה לשם הנוחות:

הגדרה 1.2 הרחבה L/K נקראת פתירה אם חבורת גלואה של סגור גלואה שלה היא פתירה.

למה 1.3 אם יש מגדל $K \subseteq K_1 \subseteq K_2$, כאשר K_1/K, K_2/K_1 שתיהן פתירות, אזי K_2/K פתירה.

הוכחה: נסמן N_1 את סגור גלואה של K_1 מעל K, N_2 את סגור גלואה של K_2 מעל K_1, M את סגור גלואה של K_2 מעל K. היחסים הם:

$$\begin{tikzcd}
 & N_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \arrow[r, dash] & N_1N_2 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M \\
K \arrow[ur, dash, bend left, "Galois"] \arrow[r, dash] & K_1 \arrow[r, dash] \arrow[rr, dash, bend right, "Galois"'] & K_2 \arrow[r, dash] & N_2 &
\end{tikzcd}$$

כעת נסמן

$$\begin{aligned}
G &= \mathrm{Gal}\left(M/K\right) \\
H_1 &= \mathrm{Gal}\left(M/N_1\right) \\
H_2 &= \mathrm{Gal}\left(M/N_2\right) \\
U_1 &= \mathrm{Gal}\left(M/K_1\right) \\
U_2 &= \mathrm{Gal}\left(M/K_2\right)
\end{aligned}$$

והיחסים הם:

$$
\begin{tikzcd}
 & H_2 = \bigcap\limits_{g \in U_1} U_2^g \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & U_2 \arrow[r, dash] & U_1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & G \\
1 = \bigcap\limits_{g \in G} U_2^g \arrow[r, dash] & H_1 \cap H_2 \arrow[rr, dash] & & H_1 = \bigcap\limits_{g \in G} U_1^g &
\end{tikzcd}
$$

נמשיך בשיעור הבא. ■

■