אלגברה ב2

ארזים ©

27 ביוני 2017

1 הרחבות גלואה אינסופיות

ראינו שהתאמת גלואה במקרה האינסופי לא עובדת - נתנו דוגמא שבה יש יותר מדי תת חבורות (יותר מאשר תת הרחבות). נגדיר טופולוגיה על $G = \mathrm{Gal}\left(L/K\right)$.

הגדרה 1.1 טופולוגיה על קבוצה X היא אוסף $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ עם התכונות הבאות:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. אם $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ אזי גם
$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$$
3. אם $U, V \in \mathcal{T}$ אזי גם $U \cap V \in \mathcal{T}$.

קבוצה $A \in \mathcal{T}$ נקראת פתוחה, וקבוצה B עם $B^c \in \mathcal{T}$ נקראת סגורה.

הגדרה 1.2 נאמר כי $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq G$ "קרובות" אם יש הרחבה סופית E/K (עם $E \subseteq L$) שמקיימת $\sigma_1 |_E = \sigma_2 |_E$.

הגדרה 1.3 הטופולוגיה שלנו על G תהיה זו שנוצרת (כלומר, אוסף כל האיחודים מעוצמה כלשהי וכל החיתוכים הסופיים) מהקבוצות

$$U_{E,\sigma} = \{\tau \in G \mid \tau |_E = \sigma |_E\}$$

כאשר $\sigma \in G$, $K \subseteq E \subseteq L$ תת הרחבה סופית.

נשים לב שאם נסמן

$$U_E = U_{E,\mathrm{id}}$$

אזי

$$U_{E,\sigma} = \sigma U_E$$

הערה 1.4 $U_E \leq G$, והיא פתוחה (מההגדרה). האינדקס שלה סופי - $[G:U_E] \leq [E:K] = n$. אכן, אם ניקח $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ כל השיכונים של E לתוך L, ונרחיב אותם שרירותית לכל L, אז כל $\sigma : L \to L$ יהיה i עם $\sigma \mid_E = \sigma_i$. לכן נקבל כי $\sigma U_E = \sigma_i U_E$. אם כן, $\sigma_i U_E$ הם כל הקוסטים.

מסקנה 1.5 $U_E \leq G$ סגורה.

הוכחה: נוכיח טענה חזקה יותר. תהי $H \leq G$ פתוחה ומאינדקס סופי. נראה כי H סגורה. נכתוב

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i H \Rightarrow H = G \backslash \left(\bigcup_{i=2}^{n} \sigma_i H \right)$$

הקבוצה שמחסרים כאן היא פתוחה, ולכן קיבלנו עי H סגורה. ■

דוגמא תהי G סופית עם הטופולוגיה הדיסקרטית (כל סינגלטון הוא פתוח). אזי כל תת חבורה היא פתוחה וסגורה.

דוגמא למרחב טופולוגי כללי יותר: מרחב קנטור. יש בניות מפורשות (מתחילים מהקטע $[0,1]$ ומוציאים בכל שלב את השליש האמצעי של כל קטע שנשאר לנו), או כתיבה:

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0,2\} \right\}$$

זו קבוצה סגורה (כחיתוך של סגורות) מעוצמה $2^{\aleph_0}$ שבה כל קבוצה פתוחה היא סגורה.

הערה 1.6 יש על K מבנה של חבורות:

$$K \cong \left({}^{\mathbb{Z}}\!/\!{}_{2\mathbb{Z}} \right)^{\aleph_0}$$

כאשר האיזומורפיזם כאן הוא על ידי הומיאומורפיזם (העתקה חד חד ערכית ועל שמעבירה פתוחה לפתוחה בשני הכיוונים). הטופולוגיה באגף שמאל היא טופולוגיית המכפלה (מסובך, אפשר לקרוא באינטרנט).

דוגמא נבחר $l \geq 3$ ראשוני, וכן p ראשוני נוסף. נסתכל על המגדל האינסופי:

$$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^l} \subseteq \mathbb{F}_{p^{l^2}} \subseteq \cdots \subseteq L = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{l^i}}$$

נסמן $\sigma = \mathrm{Frob}_p \in G = \mathrm{Gal}\left({}^{L}\!/\!{}_{\mathbb{F}_p} \right)$. נשים לב שמתקיים

$$L^{\langle \sigma \rangle} = \{ x \in L \mid \sigma(x) = x \} = \{ x \in L \mid x^p = x \} = \mathbb{F}_p$$

כדי להראות שהתאמת גלואה נכשלת, צריך להראות שלא מתקיים $\langle \sigma \rangle = G$, כלומר למצוא $\tau \in G$ שאינו חזקה של σ. נבחר $\tau_1 \in \mathrm{Gal}\left({}^{\mathbb{F}_{p^l}}\!/\!{}_{\mathbb{F}_p} \right)$ עם $\tau_1 = \sigma \mid_{\mathbb{F}_{p^l}}$. כעת:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{p^{l^2}}/\mathbb{F}_p\right) \arrow[r, "res"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{p^l}/\mathbb{F}_p\right) \arrow[d, equal] \\
C_{l^2}^l \arrow[r] & C_{l^2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_l \cong C_{l^2}/C_{l^2}^l \arrow[d, equal] \\
 & \left\langle \sigma \mid_{\mathbb{F}_{p^{l^2}}} \right\rangle & \left\langle \sigma \mid_{\mathbb{F}_{p^l}} \right\rangle
\end{tikzcd}$$

לפשטות נסמן מעתה $\sigma_i = \sigma \mid_{\mathbb{F}_{p^{l^i}}}$. נבחר

$$\tau_2 = \sigma_2^{1+l} = \underbrace{\sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_2}_{l+1}$$

ואז

$$\tau_2 \mid_{\mathbb{F}_{p^l}} = \tau_1$$

נגדיר

$$\tau_n \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{p^{l^n}}/\mathbb{F}_p\right)$$

עם

$$\tau_n = \sigma_n^{1+l+\cdots+l^{n-1}}$$

זה נראה כך:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}_{p^{l^n}} \arrow[d, dash] \\
\vdots \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}_{p^{l^2}} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}_{p^l} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{F}_p \arrow[u, bend right, "\tau_1=\sigma_1^1"'] \arrow[uu, bend left, "\tau_2=\sigma_2^{1+l}"] \arrow[uuuu, bend right, "\tau_n=\sigma_n^{1+l+\cdots+l^{n-1}}"']
\end{tikzcd}$$

אם $n \geq m$ וכן $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}} \subseteq \mathbb{F}_{p^{l^m}}$ אזי

$$\tau_m(x) = \sigma^{1+l+\cdots+l^{m-1}}(x) = \sigma\left(\sigma^l\left(\ldots\sigma^{l^{m-1}}(x)\right)\right) = \sigma\left(\sigma^l\left(\ldots\sigma^{l^{n-1}}(x)\right)\right) = \tau_n(x)$$

וזאת משום שלקחנו $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}}$ וכן $\sigma^{l^k}(x) = x$ לכל $k \geq n$. נגדיר כעת $\tau \in G$ על ידי

$$\tau(x) = \tau_n(x)$$

על $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}}$. זה מוגדר היטב על האיחוד L. נטען כי לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\tau \neq \sigma^k$$

נוכיח זאת. אם יש $k \in \mathbb{Z}$ כזה, אזי לכל $n \geq 1$ מתקיים $\tau_n \mid \sigma_n^k$ (על ידי צמצום אל $\mathbb{F}_{p^{l^n}}$), כאשר שוויון זה הוא בחבורה $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{p^{l^n}}/\mathbb{F}_p\right)$. מצד שני, $\tau_n = \sigma_n^{1+l+\cdots+l^{n-1}}$, ומכן שלכל $n \geq 1$ נקבל

$$k \equiv 1 + l + \cdots + l^{n-1} \mod \underbrace{\mathrm{ord}(\sigma_n)}_{l^n} = \frac{1-l^n}{1-l} \mod l^n$$

$$(1-l)\,k \equiv 1 \mod l^n$$

וזאת לכל n. לכן נקבל $(1-l)\,k = 1$, אבל מכאן נקבל $k = \pm 1$ וגם $1 - l = \pm 1$ - ולקחנו $l \geq 3$, אז זו סתירה.